Fonksiyonlar – Limit ve Süreklilik
Türev ve Uygulamaları ile
İntegral problemi olanlar için...

ANTRENMANLARLA
MATEMATİK

Dördüncü Kitap

Halil İbrahim KÜÇÜKKAYA
Matematik Bire Bir Öğretim Uzmanı

Ahmet KARAKOÇ **Mehmet GİRGİÇ**

Ümitli Kurbağa

Bir kurbağa sürüsü ormanda yürürken, içlerinden ikisi bir çukura düştü. Diğer bütün kurbağalar çukurun etrafında toplandılar. Çukur bir hayli derindi ve arkadaşlarının zıplayıp dışarı çıkması mümkün görünmüyordu.
Yukarıdaki kurbağalar, boşuna uğraşmamalarını söylediler arkadaşlarına:
"Çukur çok derin, dışarı çıkmanız imkânsız."
Ancak, çukura düşen kurbağalar onların söylediklerine aldırmayıp çukurdan çıkmak için mücadeleye devam ettiler. Yukarıdakiler ise hala boşuna çırpınıp durmamalarını, ölümün onlar için kurtuluş olduğunu söylüyorlardı.
Sonunda kurbağalardan birisi söylenenlerden etkilendi ve mücadeleyi bıraktı. Diğeri ise çabalamaya devam etti. Yukarıdakiler de, çırpınıp durarak daha çok acı çektiğini söylemeyi sürdürdüler.
Ne var ki, çukurdaki kurbağa son bir hamle daha yaptı, bu kez daha yükseğe sıçramayı başardı ve çukurdan çıktı.

Çünkü bu kurbağa sağırdı. O yüzden, arkadaşlarının ümit kırıcı sözlerine kulak asmamıştı.

Etrafınızdakilerin olumsuz düşüncelerine kulaklarınızı kapatın.
"Ümidinizi kaybetmeyin ve bilin ki ümidini kaybeden insanın kaybedeceği başka şeyi kalmamıştır."
Kararlı olun ve başarı kapısını sabırla çalın. Sizden öncekilere nasıl açılmışsa size de öyle açılacaktır. Emin olun.

Dördüncü Kitapta Neler Var?

Üstelemek başarının temel unsurudur. Kapıyı yeterince uzun süre ve yüksek sesle çalarsanız, birilerini uyandıracağınızdan emin olabilirsiniz.

Henry Wadsworth Longfellow

Matematikte zekâdan önce sabır gelir.

Cahit Arf

Toplam ve Çarpım Sembolleri

Aradığını bilmeyen, bulduğunu anlayamaz.

Cladue Bernard

Okunu hedeften öteye atan okçu, okunu hedefe ulaştıramayan okçudan daha başarılı değildir.

Motnagıne

TOPLAM SEMBOLÜ

"Uzun uzun amele gibi yazmaktansa..."diye düşünenlerin bulduğu bir gösterim şekli bu.☺

Örneğin, 1 den 61 e kadar olan doğal sayıların toplamını en kısa nasıl ifade edersiniz?
Ya da, 5 ile bölündüğünde 2 kalanını veren iki basamaklı doğal sayıların toplamını.
İşte bu mesele.☺

Bir Latin harfi olan Σ (sigma) ile gösterilen toplam sembolü şu;

n sayısı pozitif tam sayı olmak üzere,

$$\sum_{\underset{\text{değişken}}{k}=\underset{\text{alt sınır}}{1}}^{\overset{\text{üst sınır}}{n}} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$$

ifadesinin anlattığı şudur;
Değişkene (burada k ya) alt sınır değerinden başlayarak üst sınıra kadar olan ardışık tam sayı değerleri ver ve her değerden sonra bulduğun sonuçları topla.

Yani,

$$\sum_{k=1}^{4} k^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2$$

$$\sum_{i=1}^{2} x_i^2 = x_1^2 + x_2^2 \text{ ve}$$

$$\sum_{n=1}^{2} x_n = x_1 + x_2 \text{ ve aynı şekilde}$$

$$\sum_{k=-2}^{1} f(k+1) = f(-1) + f(0) + f(1) + f(2) \text{ demektir.}$$

Var mı anlaşılmayan bir şey?

Toplam sembolüyle ilgili soruların çoğunda temel mantığı bilmek yeterlidir. Formüle mormüle gerek yoktur☺
Birazdan göreceksiniz zaten.☺

1. $\sum_{k=1}^{4} k$

toplamının değeri kaçtır?

2. $\sum_{k=2}^{3} (k^2 + 1)$

toplamının değeri kaçtır?

3. $\sum_{k=-4}^{6} k$

ifadesinin değeri kaçtır?

4. $\sum_{k=-3}^{4} k^3$

işleminin sonucu kaçtır?

5. $\sum_{k=-5}^{6} 2k$

işleminin sonucu kaçtır?

6. $\sum_{k=1}^{4} (2^k - 3)$

işleminin sonucu kaçtır?

7. $\sum_{k=1}^{10} (-1)^k \cdot 2k$

toplamının sonucu kaçtır?

8. $\sum_{k=1}^{13} (-1)^{k+1} \cdot 3k$

toplamının sonucu kaçtır?

9. $\sum_{k=1}^{8} \left(\sqrt{k+1} - \sqrt{k}\right)$

toplamının sonucu kaçtır?

10. $\sum_{k=4}^{120} \left(\sqrt{k+1} - \sqrt{k}\right)$

ifadesinin değeri kaçtır?

11. $\sum_{k=1}^{12} \left(\sqrt{2k+1} - \sqrt{2k-1}\right)$

toplamının sonucu kaçtır?

12. $\sum_{x=1}^{65} \left(\sqrt{3x+1} - \sqrt{3x-2}\right)$

ifadesinin değeri kaçtır?

Şunlarda biraz logaritma bilgisi lazım.

1. $\sum_{k=2}^{4} \log_{24} k$

ifadesinin değeri kaçtır?

2. $\sum_{k=4}^{63} \log_2 \left(1 + \frac{1}{k}\right)$

ifadesinin değeri kaçtır?

3. $\sum_{k=1}^{10} \log_{10!} k$

ifadesinin değeri kaçtır?

4. $\sum_{k=1}^{15} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right)$

toplamının değeri kaçtır?

5. $\sum_{k=1}^{7} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+2}\right)$

toplamının değeri kaçtır?

6. $i^2 = -1$ olmak üzere

$\sum_{n=1}^{24} i^n$

ifadesinin değeri kaçtır?

7. $i^2 = -1$ olmak üzere

$\sum_{k=0}^{2011} i^k$

ifadesinin değeri kaçtır?

8. $i^2 = -1$ olmak üzere

$\sum_{n=0}^{18} i^{-n}$

ifadesinin değeri nedir?

9. $f(x) = 4x + 3$ olmak üzere,

$$A = \sum_{k=1}^{3} f(k)$$

olduğuna göre, A kaçtır?

10. $x_1 = 3$, $x_2 = -4$ olmak üzere

$$\sum_{k=1}^{2} (x_k + 1) \cdot (x_k + 2)$$

ifadesinin değeri kaçtır?

11. $f(x) = 3x - 1$, $x_1 = 2$ $x_2 = -2$ olmak üzere,

$$\sum_{n=1}^{2} x_n \cdot f(n)$$

ifadesinin değeri kaçtır?

12. $f(x) = x^2 - 3x - 5$ olmak üzere,

$$K = \sum_{k=0}^{1} (k + f(k))$$

olduğuna göre, K kaçtır?

13. $\sum_{k=1}^{n} a_k = 2n^2$

olduğuna göre, $a_1 + a_2 + a_3$ toplamı kaçtır?

14. $\sum_{k=1}^{n} a_k = n^2 + 1$

olduğuna göre, $(a_1 + a_2 + a_3) - (a_1 + a_2)$ farkı kaçtır?

15. $\sum_{k=1}^{n} a_k = 3n - 11$

olduğuna göre, a_5 kaçtır?

16. $\sum_{k=1}^{x} a_k = x^2 + x + 3$

olduğuna göre, a_3 kaçtır?

Art arda iki tane toplam sembolü olması korkutmasın sizi. Önce içtekini halledin sonra da dıştakini.

Örnek Soru

$$\sum_{k=2}^{3} \sum_{n=3}^{5} (2k + n^2)$$

toplamının sonucu kaçtır?

Çözelim☺

Az önce ne dedim?

Önce içtekini halledin. Sonra da dıştakini.

Peki, öyle yapalım bakalım.

$$\sum_{k=2}^{3} \sum_{n=3}^{5} (2k + n^2) = \sum_{k=2}^{3} \left(\underbrace{2k+9}_{n=3} + \underbrace{2k+16}_{n=4} + \underbrace{2k+25}_{n=5} \right)$$

Gerisi bildiğiniz gibi. Düzenleyip k ya değer vereceksiniz.

$$\sum_{k=2}^{3} (6k + 50) = \underbrace{6.2 + 50}_{k=2\text{ için}} + \underbrace{6.3 + 50}_{k=3\text{ için}} = 130$$

Anlaşıldı mı?

Devam edin bakalım☺

1. $\sum_{k=1}^{2} \sum_{n=2}^{3} (4k - n)$

toplamının sonucu kaçtır?

2. $\sum_{m=0}^{2} \sum_{n=1}^{4} mn$

toplamının sonucu kaçtır?

3. $\sum_{k=1}^{2} \sum_{n=2}^{3} (3k + n^2)$

toplamının sonucu kaçtır?

4. $\sum_{k=3}^{4} \sum_{n=-2}^{1} (k \cdot n^2 + 2)$

toplamının sonucu kaçtır?

5. $\sum_{k=1}^{4} \sum_{i=1}^{3} (k + i)$

ifadesinin değeri kaçtır?

6. $\sum_{k=1}^{5} \sum_{i=1}^{2} (k - i)$

ifadesinin değeri kaçtır?

7. $\sum_{k=1}^{2} \sum_{i=1}^{3} (2k + 3i)$

ifadesinin değeri kaçtır?

8. $\sum_{k=1}^{3}\sum_{i=1}^{2}(k+1)(i-2)$

ifadesinin değeri kaçtır?

9. $\sum_{k=1}^{2}\sum_{i=1}^{2}\frac{k+1}{i-3}$

ifadesinin değeri kaçtır?

Tabii üç tane olması da korkutmasın sizi.☺ Mantık yine aynı. Değişkene değer verin ve toplayın.

10. $\sum_{k=1}^{3}\sum_{n=2}^{3}\sum_{p=0}^{2}(n\cdot k+p)$

toplamının sonucu kaçtır?

11. $\sum_{k=3}^{4}\sum_{i=2}^{3}\sum_{j=1}^{2}(i+j+k)$

ifadesinin değeri kaçtır?

12. $\sum_{k=1}^{15}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$

ifadesinin değeri kaçtır?

Şu üç soruyu üstteki soruya benzetip çözmek lâzım☺

13. $\sum_{k=1}^{23}\frac{1}{k(k+1)}$

ifadesinin değeri kaçtır?

14. $\sum_{k=3}^{11}\frac{1}{k^2+k}$

ifadesinin değeri kaçtır?

15. $\sum_{k=1}^{27}\frac{1}{k^2+3k+2}$

ifadesinin değeri kaçtır?

Gördüğünüz üzre bundan önceki antrenmanlarda soruların hiç birinde formül filan yoktu.
Artık özelliklere geçelim. Müsaadenizle☺ Gerçi son sorular biraz gıcıktı ama olsun.☺

Toplam Sembolünün özellikleri

Hani özellik dediysem öyle uzun uzadıya şeyler değil. Mantığınızla siz bile çıkarabilirsiniz bu sonuçları.☺ Ama yine de yazdığımda korkup kaçmayın☺ Harfli marfli yazınca zor gibi duruyorlar. Ama rakamlara dökünce daha sevimli oluyorlar.☺

1. $\sum_{k=1}^{n}c=\underbrace{c+c+c+\ldots+c}_{n\text{ tane}}=n.c$

Yani değişken içermeyen toplam olunca terim sayısı ile sayıyı direkt çarpın.

Örneğin

$\sum_{k=1}^{10}5=10\cdot5=50$ (Burada 10 tane 5 toplanıyor.)

Peki, şu toplamın sonucu ne?

$\sum_{k=1}^{18}\frac{n}{6}=?$

3n değil mi? Çünkü bunda da 18 tane $\frac{n}{6}$ toplanıyor.

2. Değişkenin yanındaki sayı toplam sembolünün dışına çıkarılabilir. Demek istediğim şu:

Meselâ, $\sum_{k=1}^{3}4k^2=4\sum_{k=1}^{3}k^2$ olduğunu görün isterseniz. Veya $\sum_{k=0}^{5}3k=3\sum_{k=0}^{5}k$ olduğunu.

3. $\sum_{k=0}^{3}\left(k^2+3k\right)$ gibi toplamlar hesaplanırken bunun

yerine $\sum_{k=0}^{3}k^2+\sum_{k=0}^{3}3k$ yazmanızda hiçbir sakınca yok.

Korkmayın. Sonuçları aynı çıkar. Görün isterseniz.☺

4. **Sınır değiştirme olayı.**

Diğerleri de önemliydi. Ama bu sanki biraz daha önemli gibi. Gerçi ÖSYM deki amcalar son 30 yılda sormamışlar. Ama belli mi olur?☺

Sınır değiştirmeyi küçük bir iki örnekçik üzerinde izah edeyim.

$\sum_{k=3}^{5}4k$ toplamıyla $\sum_{k=3-2}^{5-2}4(k+2)$ toplamı,

Aynı şekilde

$\sum_{k=-3}^{4}k^2$ toplamıyla $\sum_{k=-3+4}^{4+4}(k-4)^2$ toplamı eşittir.

Bir şey anladınız mı?

Şunu yaptım. Alt sınırdan kaç çıkardıysam üst sınırdan da aynı sayıyı çıkardım. (Tabii alt sınıra eklediysem üst sınıra da ekledim.) Fakat k yerine ne yazdığıma dikkat edin.

Sınırlardan 2 çıkarınca k yerine (k + 2) yazdım.

Sınırlara 4 ekleyince ise k yerine (k – 4) yazdım.

Şimdi anladınız mı?

O zaman $\sum_{k=-2}^{8}(5k+2)=\sum_{k=-2+3}^{8+3}(5(k-3)+2)$ olduğunu görün ve şimdilik geçin bu olayı.

İyi de ne zorumuz var ki sınırları değiştiriyoruz? Zorumuz olmazsa değiştirmeyiz herhalde.☺ Birazdan göreceksiniz zaten. Bu konudaki formüllerde alt sınır hep 1 den başlıyor. Formül dediysem biri, bilemediniz en fazla ilk ikisi önemli olan dört tane formül var zaten.

İşte formüller☺

$$\sum_{k=1}^{n}k=1+2+3+4+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2}$$

$$\sum_{k=1}^{n}r^{k-1}=1+r+r^2+r^3+\ldots+r^{n-1}=\frac{1-r^n}{1-r}$$

$$\sum_{k=1}^{n}k^3=1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3=\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$

$$\sum_{k=1}^{n}k^2=1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Formülleri zaman kazanmak için kullanacağız. Öyle ya vaktimiz çok değerli☺

Ve formüllerde alt sınırların hep 1 den başladığına dikkat edin. Eğer alt sınır 1 değilse sınır değiştirme olayına girip 1 yaparsınız artık.

Yalnız formülleri öğrendiniz diye gidip her soruda kullanmaya da çalışmayın. Alt ve üst sınır arasındaki fark az ise değer vererek çözmek daha güzel. Bence tabii ki.☺ Tecrübe bunu gerektiriyor.

Kısaca iş uzayacaksa formül kullanın.

1. $\sum_{k=1}^{9} 5$

ifadesinin değeri kaçtır?

2. $\sum_{k=0}^{11} 3$

ifadesinin değeri kaçtır?

3. $\sum_{i=1}^{25} k = 125$

olduğuna göre, k kaçtır?

4. $\sum_{m=-5}^{14} a = 100$

olduğuna göre, a kaçtır?

5. $\sum_{k=6}^{16} (x+1) = 55$

olduğuna göre, x kaçtır?

6. $\sum_{k=1}^{20} k$

ifadesinin değeri kaçtır?

7. $\sum_{k=1}^{20} k - \sum_{k=1}^{10} k$

ifadesinin değeri kaçtır?

8. $\sum_{k=1}^{9} 4k$

ifadesinin değeri kaçtır?

1. $\sum_{k=1}^{10} 2k + \sum_{k=1}^{20} 3$

ifadesinin değeri kaçtır?

2. $\sum_{k=1}^{15} (2k-1)$

ifadesinin değeri kaçtır?

3. $\sum_{k=1}^{8} 3k$

ifadesinin değeri kaçtır?

4. $\sum_{a=1}^{9} (4a+2)$

ifadesinin değeri kaçtır?

5. $\sum_{k=1}^{12} (3k-4)$

ifadesinin değeri kaçtır?

6. $\sum_{i=1}^{15} (5i+1)$

ifadesinin değeri kaçtır?

7. $\sum_{i=1}^{8} (3k+i) = 108$

olduğuna göre, k kaçtır?

8. $\sum_{k=1}^{12} (a \cdot k + 1) = 168$

olduğuna göre, a kaçtır?

9. $\sum_{n=1}^{10}(3n+a)=205$

olduğuna göre, a kaçtır?

10. $\sum_{n=1}^{10} n^2$

ifadesinin değeri kaçtır?

11. $\sum_{k=1}^{10}\left(6k^2-5\right)$

ifadesinin değeri kaçtır?

12. $\sum_{n=1}^{10}\left(4n^2+1\right)$

ifadesinin değeri kaçtır?

13. $\sum_{k=1}^{10}\left(4k^2-2k\right)$

ifadesinin değeri kaçtır?

14. $\sum_{a=1}^{10}\left(a^2+3a+2\right)$

ifadesinin değeri kaçtır?

15. $\sum_{k=1}^{9} k(k+1)$

ifadesinin değeri kaçtır?

16. $\sum_{i=1}^{10}(i-2)(i+3)$

ifadesinin değeri kaçtır?

1. $\sum_{m=1}^{10} m^3$

ifadesinin değeri kaçtır?

2. $\sum_{m=1}^{10}\left(8m^3-2m+1\right)$

ifadesinin değeri kaçtır?

3. $\sum_{x=1}^{5}\left(4x^3-6x^2+3\right)$

ifadesinin değeri kaçtır?

4. $\sum_{a=1}^{6} a(a-1)(a+1)$

ifadesinin değeri kaçtır?

5. $\sum_{k=0}^{15} 2^k$

ifadesinin değeri kaçtır?

6. $\sum_{k=0}^{11} 3^k$

ifadesinin değeri kaçtır?

7. $\sum_{k=0}^{11} 4 \cdot 5^k$

ifadesinin değeri kaçtır?

8. $a=\sum_{k=0}^{100} 3^k$

olduğuna göre, a nın 5 ile bölümünden kalan kaçtır?

9. $\sum_{n=1}^{61} 7^n$

toplamının birler basamağı kaçtır?

10. $\sum_{k=0}^{12} (2k-4)$

ifadesinin değeri kaçtır?

11. $\sum_{k=-8}^{0} (k+10)$

ifadesinin değeri kaçtır?

12. $\sum_{k=4}^{13} (3k-9)$

ifadesinin değeri kaçtır?

13. $\sum_{k=-2}^{7} \left(k^2+6k+10\right)$

ifadesinin değeri kaçtır?

14. $\sum_{k=-3}^{11} 2^{k+4}$

ifadesinin değeri kaçtır?

15. $\sum_{k=5}^{14} \sum_{n=-1}^{3} (2n+k)$

ifadesinin değeri kaçtır?

16. $\sum_{k=3}^{12} \sum_{n=2}^{3} (nk-2)$

ifadesinin değeri kaçtır?

Bazen toplam sembolü altında verilmeyen ifadelerinde toplamını bulmak için toplam sembolünü kullanmak icap eder. Ya da uzun uzun toplamak☺
Önce şu toplamları toplam sembolü kullanarak ifade edin bakalım.

1. **Aşağıdaki toplamları toplam sembolü kullanarak ifade ediniz.**

a) $3+6+9+\cdots+36$

b) $3+7+11+\cdots+99$

2. **Aşağıdaki toplamları toplam sembolü kullanarak ifade ediniz.**

a) $-8-3+2+7+\cdots+47$

b) $-52-47-42-\ldots+8$

3. **Aşağıdaki toplamları toplam sembolü kullanarak ifade ediniz.**

a) $1\cdot3+2\cdot4+3\cdot5+\cdots+23\cdot25$

b) $2.3+4.5+6.7+\cdots+26.27$

4. **Aşağıdaki toplamları toplam sembolü kullanarak ifade ediniz.**

a) $\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{2\cdot3}+\frac{1}{3\cdot4}+\cdots+\frac{1}{11\cdot12}$

b) $\frac{1}{2\cdot5}+\frac{1}{4\cdot7}+\frac{1}{6\cdot9}+\cdots+\frac{1}{20\cdot23}$

5. **Aşağıdaki toplamları toplam sembolü kullanarak ifade ediniz.**

a) $\frac{1}{2}+\frac{2}{5}+\frac{3}{8}+\frac{4}{11}+\cdots+\frac{21}{62}$

b) $\frac{1}{1!}+\frac{2}{2!}+\frac{3}{3!}+\cdots+\frac{15}{15!}$

6. $5+9+13+17+\ldots+81$

toplamının sonucu kaçtır?

7. $-4+3+10+...+45$
toplamının sonucu kaçtır?

8. 50 den küçük 4 ile tam bölünen doğal sayıların toplamı kaçtır?

9. 32 ile 123 arasında 5 ile tam bölünen doğal sayıların toplamı kaçtır?

10. 5 ile bölündüğünde 2 kalanını veren iki basamaklı doğal sayıların toplamı kaçtır?

11. $1.2+2.3+3.4+...+20.21$
toplamının sonucu kaçtır?

12. $1.3+2.5+3.7+...+20.41$
toplamının sonucu kaçtır?

13. $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\cdots+\frac{1}{7\cdot 8}$
toplamının sonucu kaçtır?

14. $1+4+9+16+...+400$
toplamının sonucu kaçtır?

ÇARPIM SEMBOLÜ

Çarpım sembolündeki mantık da toplam sembolündeki gibi. Ama burada değişkenin her değeri için elde edilen sonuçları toplamayıp çarpacaksınız. O kadar...

Demek istediğim şu:

$\prod_{k=1}^{5} k = 1.2.3.4.5$ demektir.

Aynı şekilde, $\prod_{n=2}^{3}(n^2+1)=(2^2+1)(3^2+1)$ ve

$\prod_{i=1}^{2}(x_i-1)=(x_1-1)(x_2-1)$ dir.

Zaten birazdan göreceksiniz. Çarpım sembolü ile ilgili gelebilecek çok da fazla soru tipi yok aslında.

Önce formülsüz çözülebilenler... Buyurun bakalım. Değer verip verip çarpın.

1. $\prod_{k=1}^{10}(k-8)$
ifadesinin değeri kaçtır?

2. $\prod_{k=-2}^{20}(k^2-25)$
ifadesinin değeri kaçtır?

Fark ettiniz mi?
Değişkenin herhangi bir değeri için çarpım sembolünün yanındaki ifade sıfır çıkıyorsa sonuç direkt sıfır. Onun için sınırlar arasında sıfır yapan değer var mı diye bakmak lâzım.

3. $\prod_{k=-1}^{10}(k^2-2k-15)$
ifadesinin değeri kaçtır?

4. $\prod_{k=-3}^{2}(2^n-1)$
ifadesinin değeri kaçtır?

5. $\prod_{k=0}^{20}\left(\frac{n+1}{7}-3\right)$
ifadesinin değeri kaçtır?

6. $\prod_{k=1}^{21}(k+1)(k-15)$
ifadesinin değeri kaçtır?

7. $\prod_{k=-6}^{26} \frac{2k}{k+24}$

ifadesinin değeri kaçtır?

8. $\prod_{k=6}^{49} \frac{3k-105}{k+75}$

ifadesinin değeri kaçtır?

9. $\prod_{k=1}^{21} \log k$

ifadesinin değeri kaçtır?

10. $\prod_{k=12}^{122} \log(k-11)$

ifadesinin değeri kaçtır?

11. $\prod_{k=2}^{89} \left(1-\frac{1}{k}\right)$

ifadesinin değeri kaçtır?

12. $\prod_{k=1}^{60} \left(1+\frac{1}{k}\right)$

ifadesinin değeri kaçtır?

13. $\prod_{k=1}^{61} \left(\frac{k}{k+1}\right)$

ifadesinin değeri kaçtır?

14. $\prod_{k=2}^{63} \log_k(k+1)$

ifadesinin değeri kaçtır?

Çarpım sembolüyle ilgili şimdiye kadar ki antrenmanlarda formül mormül yoktu gördüğünüz gibi. Demek ki burada sembollerin ne anlama geldiğini bilip cesaretle bu işin üzerine gitseniz bu olay da tamamdır. Çarpım sembolünü gördüğünüzde ne yapacağınızı bilin yeter. Gerçi özellik diyebileceğiniz bir iki şey var ama çok da önemli değiller.

İşte çarpım sembolünün özellikleri

1. $\prod_{k=1}^{5} 2 = 2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2 = 2^5$ demektir.

Aynı şekilde $\prod_{k=1}^{6} 3 = 3\cdot3\cdot3\cdot3\cdot3\cdot3 = 3^6$ dır.

Anladınız mı ne yaptığımızı?

İlkinde 5 tane ikinin çarpımı olduğu için sonuç 2 üzeri 5 e, ikincisinde ise 6 tane 3 ün çarpımı olduğu için sonuç 3 üzeri 6 ya eşit oldu.☺

Şunların sonuçlarını da siz bulun bakalım.

$\prod_{k=1}^{20} 5 =$

$\prod_{k=1}^{n+2} 4 =$

İlkini 5^{20}, ikincisini de 4^{n+2} bulduysanız devam edeyim.☺

2. $\prod_{k=1}^{6} k = 1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6 = 6!$ dir. Aynı şekilde

$\prod_{k=1}^{6} k^2 = 1^2\cdot2^2\cdot3^2\cdot4^2\cdot5^2\cdot6^2 = (6!)^2$ ve yine aynı

mantıkla $\prod_{k=1}^{10} k^3 = (10!)^3$ dür.

Siz de şunların sonucunu bulun bakayım.☺

$\prod_{k=1}^{25} k =$

$\prod_{k=1}^{12} k^4 =$

$\prod_{k=1}^{40} k^3 =$

Sırasıyla 25!, $(12!)^4$ ve $(40!)^3$ bulduysanız aferin.☺

3. $\prod_{k=1}^{5} 2k = (2.1).(2.2).(2.3).(2.4).(2.5) = 2^5.\,5!$

$\prod_{k=1}^{10} 3k = 3^{10}.\,10!$

$\prod_{k=1}^{12} 5k^2 = 5^{12}.\,(12!)^2$ dir.

Fark ettiyseniz burada ilk söylediğim iki şey bir arada bulunuyor.

Şu daha önemli gibi☺

4. $\prod_{k=1}^{10} k(k+1) = \prod_{k=1}^{10} k \cdot \prod_{k=1}^{10} (k+1)$ olarak yazılabilir.

Hiçbir sakıncası yok. Hatta faydası bile var. Birazdan göreceksiniz.☺

Aynı şekilde $\prod_{k=3}^{15} \left(k^2-4\right) = \prod_{k=3}^{15} (k-2) \cdot \prod_{k=3}^{15} (k+2)$

şeklinde ifade edilebilir.

Yani, demek istediğim şu ki çarpım durumundaki bir ifade iki ayrı çarpım sembolü kullanılarak da çarpılabilir. Bunun işe yaradığı sorular genelde çok da kolay değildir aslında. Ama siz yaparsınız☺

1. $\prod_{k=1}^{10} 2$

ifadesinin değeri kaçtır?

2. $\prod_{i=15}^{34} 3$

ifadesinin değeri kaçtır?

3. $\prod_{i=1}^{3} k = 27$

olduğuna göre, k kaçtır?

4. $\prod_{k=1}^{11} 3k$

ifadesinin değeri kaçtır?

5. $\prod_{k=1}^{7} 2k^3$

ifadesinin değeri kaçtır?

6. $\prod_{k=1}^{10} 2(k+1)$

ifadesinin değeri kaçtır?

Şu soruları iki ayrı çarpım sembolü kullanarak çözmekte büyük fayda var.☺ Şu bizim 4. özellikteki gibi yani.

7. $\prod_{k=1}^{15} k(16-k)$

ifadesinin değeri kaçtır?

8. $\prod_{k=2}^{9} (k^2-1)$

ifadesinin değeri kaçtır?

9. $\prod_{k=1}^{9} (k^2-10k)$

ifadesinin değeri kaçtır?

10. $\prod_{k=2}^{10} \left(1-\frac{1}{k^2}\right)$

ifadesinin değeri kaçtır?

1. $\prod_{n=3}^{11} \frac{n^2-1}{n^2-4}$

ifadesinin değeri kaçtır?

2. $\prod_{n=4}^{12} \left(1+\frac{5}{n^2-9}\right)$

ifadesinin değeri kaçtır?

Son olarak şuna da bakıp bitirelim bu konuyu.

$$\prod_{k=1}^{21} 2^k = 2^1 . 2^2 . 2^3 \ldots 2^{21} = 2^{1+2+3+\ldots+21}$$

$$= 2^{\sum_{k=1}^{21} k}$$

Aynı mantıkla $\prod_{n=1}^{10} 3^{2n-1} = 3^{\sum_{n=1}^{10}(2n-1)}$ yazılabilir.

Yani, sayının üssü k lı filan olursa üste toplam yapılıyor.

Bu özellik verdiğim örnekçikte biraz basit gibi duruyor. Ama üs biraz karışınca azim faydası var bu özelliğin.☺

Peki, aşağıdakilerden hangisinin sonucu 2^{90} a eşit olduğunu bulun bakalım☺

I. $\prod_{n=1}^{10} 2^{3n-2}$

II. $\prod_{p=1}^{12} 2^{2p+1}$

III. $\prod_{k=1}^{9} 2^{4k-10}$

Hangisinin miş? III. nün diyorsanız haklısınız.☺

3. $\prod_{k=-3}^{4} 3^k$

ifadesinin değeri kaçtır?

4. $\prod_{k=1}^{21} 3^k$

ifadesinin değeri kaçtır?

5. $\prod_{k=5}^{15} 2^k$

ifadesinin değeri kaçtır?

6. $\prod_{k=1}^{6} 2^{4k-5}$

ifadesinin değeri kaçtır?

7. $\prod_{i=2}^{3} \sum_{k=1}^{5} 3$

ifadesinin değeri kaçtır?

8. $\sum_{i=0}^{2} \prod_{k=1}^{3} 3 = 3^{2a-6}$

olduğuna göre, a kaçtır?

9. $\sum_{a=2}^{16} \prod_{b=1}^{13} \left(ab^2 - 49a\right)$

ifadesinin değeri kaçtır?

10. $\prod_{k=1}^{3} \prod_{i=1}^{2} (k+i)$

ifadesinin değeri kaçtır?

11. $\prod_{k=1}^{4} \prod_{n=1}^{5} 2kn$

ifadesinin değeri kaçtır?

12. $x^2 + 2x + 4 = 0$ denkleminin kökleri x_1 ve x_2 dir.

Buna göre, $\prod_{i=1}^{2} x_i$ ifadesinin değeri kaçtır?

13. $x^2 - 3x + m = 0$ denkleminin kökleri x_1 ve x_2 dir.

$\prod_{i=1}^{2} \left(x_i + 1\right) = 8$ **olduğuna göre, m kaçtır?**

14. $A = \prod_{n=1}^{11} 9^{n+2}$

olduğuna göre, A^2 sayısının birler basamağı kaçtır?

Diziler

Sizi korkutan her deyim size güç, cesaret ve güven kazandırır. Kendinize "Ben bu dehşeti yaşadım. Bundan sonra gelecek şeylere hazırım" dersiniz.

Eleanor Roosevelt

İyi bir başlangıç, yarı yarıya başarı demektir.

Andre Gide

DİZİLER

Fonksiyonları biliyorsanız acayip kolay bir konu. (Gerçi bilmiyorsanız da zor değil.) Hepinizin çok rahat anlayabileceği bir konu.

Önce dizinin ne demek olduğunu söyleyeyim.

Belli bir kurala göre yazılmış sayı gruplarına **sayı dizisi** denir. Diziyi oluşturan sayılara ise **dizinin terimleri** denir.

Fakat b**ir sayı kümesinin dizi olması için,** dizinin nasıl oluştuğunu gösteren bir kuralı olması ve gruptaki her elemanın bu kurala uyması gerekiyor.

Meselâ 2, 7, 12, 17, 22, 27, ... sayıları 5 e bölününce 2 kalanını veren doğal sayılardan oluşmuştur.

Peki, bu diziye bir kural uydurmak isterseniz bunu nasıl ifade edersiniz?

Aynı şekilde,1, 4, 9, 16, 25, ...sayıları ise pozitif tam sayıların karelerinin oluşturduğu bir dizidir.

İşte dizi böyle bir şey. Anladınız mı şimdi?☺

Daha bilimsel bir tanım yapayım.

Tanım kümesi pozitif tam sayılar ve değer kümesi reel sayılar olan her fonksiyona **reel sayı dizisi** denir.

Bir dizide n. terimi veren bağıntıya **dizinin genel terimi** denir ve a_n ile gösterilir.

Fonksiyonlarda f(1), f(2), ,.. gibi değerleri bulabiliyorsanız (ki bulabildiğinizi biliyorum☺) burada işiniz daha kolay. Yalnız burada f yerinde a_n var o kadar.

Genel terimi a_n olan dizi (a_n) ile gösterilir.

$f(n) = (a_n) = (a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots)$ dizisinde n ye 1 verince dizinin birinci terimini, 2 verince de ikinci terimini bulursunuz. Yani,

a_1 : dizinin birinci terimi

a_2 : dizinin ikinci terimi

a_n : dizinin n. terimi (genel terimi) dir.

Bir de dizilerle ilgili soruları çözerken n ye sadece pozitif tam sayı değerler verebileceğinizi de hiçbir zaman unutmayın. İ mi?

Örnek Soru

$(a_n) = (3n + 1)$

dizisinin ilk terimi ve yedinci terimi kaçtır?

Çözelim☺

İlk terim birinci terim demek zaten. Bir dizinin birinci terimi de n ye 1 değeri verilerek bulunur.

n = 1 için $a_1 = 3.1 + 1 = 4$ tür. Yedinci terimi ise n ye 7 verilerek bulunur.

Bu da n = 7 için $a_7 = 3.7 + 1 = 22$ dir.

Var mı ki zor bir şey?

Gerisi de aynen böyle. Belki dizinin kuralı biraz değişik olabilir. Ve belki biraz da sorulan şeyler.☺ O kadar.☺☺

Ama yaparsınız ki zaten.☺

1. Genel terimi,

$a_n = 3n + 2$

olan dizinin yedinci terimi kaçtır?

2. Genel terimi,

$a_n = n^2 + 2n + 1$

olan dizinin dokuzuncu terimi kaçtır?

3. Genel terimi,

$a_n = \sqrt{n^3 + 9}$

olan dizinin üçüncü terimi kaçtır?

4. Genel terimi,

$a_n = 5n - 2$

olan dizinin kaçıncı terimi 28 dir?

5. Genel terimi,

$a_n = 2n^2 - 3$

olan dizinin kaçıncı terimi 47 dir?

6. Genel terimi,

$a_n = n^2 - 3n + 1$

olan dizinin kaçıncı terimi 19 dur?

7. Genel terimi,

$a_n = \frac{5n+4}{2n-5}$

olan dizinin kaçıncı terimi 8 dir?

8. $(a_n) = \left(\frac{3^n}{n!}\right)$

olduğuna göre, $\frac{a_4}{a_3}$ oranı kaçtır?

9. $(a_n) = (3n - 18)$

dizisinin kaç terimi negatiftir?

10. $(a_n) = \left(\frac{2n-12}{n+1}\right)$

dizisinin kaç terimi negatiftir?

11. $(a_n) = \left(\frac{20-3n}{2n+1}\right)$

dizisinin kaç terimi pozitiftir?

1. $(a_n) = (n^2 + 2)$

dizisinin ilk üç terim toplamı kaçtır?

2. $(a_n) = (2n - 1)$

dizisinin ilk 7 terim toplamı kaçtır?

3. $(a_n) = \left(\frac{n+2}{n+1}\right)$

dizisinin ilk 16 terim çarpımı kaçtır?

4. $(a_n) = (10 - 2n)$

dizisinin ilk 15 terim çarpımı kaçtır?

Şu sorularda toplam sembolü kullanmak daha mantıklı. Tecrübe öyle diyor. Ama yine de siz bilirsiniz.☺

5. Genel terimi,

$a_n = 4n + 1$

olan dizinin ilk 10 terim toplamı kaçtır?

6. Genel terimi,

$a_n = 6n^2 + 2n - 1$

olan dizinin ilk 10 terim toplamı kaçtır?

7. $(a_n) = \left(\sum_{k=1}^{n} 2k\right)$

dizisinin ilk dört terim toplamı kaçtır?

8. $(a_n) = \left(\sum_{k=1}^{n} (2k+1)\right)$

dizisinin ilk 10 terim toplamı kaçtır?

9. $(a_n) = \left(\prod_{k=1}^{n} k\right)$

dizisinin ilk dört terim toplamı kaçtır?

10. $(a_n) = \left((-1)^n 3n\right)$

dizisinin ilk 20 terim toplamı kaçtır?

11. $(a_n) = \left((-1)^n (2n+3)\right)$

dizisinin ilk 18 terim toplamı kaçtır?

12. $(a_n) = \left((-1)^{n+1} 5n\right)$

dizisinin ilk 15 terim toplamı kaçtır?

13. $(a_n) = \begin{cases} n^2, & n \text{ tek ise} \\ 3n-2, & n \text{ çift ise} \end{cases}$

olduğuna göre, $a_5 - a_6$ farkı kaçtır?

14. $(a_n) = \begin{cases} n^2+1, & n \equiv 2 \pmod 3 \text{ ise} \\ \frac{3n-1}{2}, & n \equiv 1 \pmod 3 \text{ ise} \\ 4-n, & n \equiv 0 \pmod 3 \text{ ise} \end{cases}$

olduğuna göre, $a_3 + a_5 + a_7$ toplamı kaçtır?

15. $(a_n) = \begin{cases} n, & n \equiv 0 \pmod 2 \\ -n, & n \equiv 1 \pmod 2 \end{cases}$

olduğuna göre, (a_n) dizisinin ilk 30 terim toplamı kaçtır?

16. $(a_n) = \begin{cases} n^2+2n, & n \equiv 0 \pmod 3 \\ n-2, & n \equiv 1 \pmod 3 \\ n+1, & n \equiv 2 \pmod 3 \end{cases}$

olduğuna göre, $\frac{a_2 + a_3}{a_4}$ oranı kaçtır?

1. Genel terimi,

$a_n = 3 + \frac{10}{n}$

olan dizinin kaç terimi tam sayıdır?

2. Genel terimi,

$a_n = n^2 + \frac{3}{n}$

olan dizinin tam sayı olan terimlerinin toplamı kaçtır?

3. $(a_n) = \left(\frac{2n+15}{n}\right)$

dizisinin kaç terimi tam sayıdır?

4. $(a_n) = \left(\frac{2n+20}{n+1}\right)$

dizisinin kaç terimi tam sayıdır?

5. $(a_n) = \left(\frac{n^2+4}{2n-21}\right)$

dizisinin kaç terimi negatiftir?

6. $(a_n) = \left(\frac{36-n^2}{n+2}\right)$

dizisinin kaç terimi pozitiftir?

7. $(a_n) = \left(-n^2+n+30\right)$

dizisinin kaç terimi pozitiftir?

8. $(a_n) = \left(\frac{5n+4}{5n-1}\right)$

dizisinin kaç terimi $\frac{5}{4}$ ten büyüktür?

9. Bir (a_n) dizisi için,

$a_n = a_{n+1} + 5n + 2$ ve $a_1 = 20$ **olduğuna göre,** a_2 **kaçtır?**

10. Bir (a_n) dizisi için, $a_{n+1} = a_n + 3n - 1$ veriliyor.

$a_1 = 2$ **olduğuna göre,** a_3 **kaçtır?**

11. Bir (a_n) dizisi için,

$a_{2n+1} = a_{2n-1} + n^2$ ve $a_1 = 2$ **olduğuna göre,** a_5 **kaçtır?**

12. Bir (a_n) dizisi için,

$a_{n+1} = n \cdot a_n + 3$ ve $a_2 = 2$ **olduğuna göre,** a_4 **kaçtır?**

13. Bir (a_n) dizisi için,

$a_{n+1} = \left(\frac{n}{n+2}\right) \cdot a_n$ ve $a_1 = 220$ **olduğuna göre,** a_{10} **kaçtır?**

14. Genel terimi,

$$a_n = \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3}$$

olan dizinin ilk 17 terim toplamı kaçtır?

15. Genel terimi,

$$a_n = \frac{1}{n \cdot (n+1)}$$

olan dizinin ilk 12 terim toplamı kaçtır?

16. Genel terimi,

$$a_n = \frac{1}{n^2 + n}$$

olan dizinin ilk 20 terim toplamı kaçtır?

ARİTMETİK DİZİ

Dizinin belki de en önemli kısmı. Ve çok kolay.
Aritmetik dizide ardışık her iki terimin farkı sabittir.

(a_n) dizisi aritmetik dizi ise,

$a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = ... = a_n - a_{n-1} = d$ dir.

Ardışık terimler arasındaki farka (buradaki d sayısına) **dizinin ortak farkı** denir.
Aritmetik dizilerde soruların çoğunun çözümünde şu yeterli olur. Ben birkaç örnek vereyim sonucu siz çıkarın.

$a_{10} - a_1 = 9d$

$a_{10} - a_4 = 6d$

$a_{10} - a_5 = 5d$, ... çoğaltabilirsiniz bunları.

Anladınız mı ne yaptığımı?
Alt indislerin (a nın sağ altındaki küçük sayılar☺) farkı neyse sonuç eşittir o kadar d ye☺

Meselâ, $a_{15} - a_8$ farkı 15 – 8 = 7 olduğundan 7d ye eşittir. $a_{15} - a_8 = 7d$

Aynı şekilde $a_7 - a_3 = 4d$ dir.

Kısacası, olay şuraya varacak; **bir aritmetik dizide herhangi iki terimi, ya da bir terim ile ortak farkı verdiklerinde bulamayacağımız şey yok☺**

Örnek Soru
Bir aritmetik dizinin üçüncü terimi 5, ortak farkı 3 olduğuna göre, on ikinci terimi kaçtır?

Çözelim☺
Soruda neyi vermiş?

$a_3 = 5$ ve d = 3. İstenen ise $a_{12} = ?$

a_{12} yi a_3 ve d ye bağlı olarak yazın bakalım.

$a_{12} - a_3 = 9d$ dir. Öyle değil mi?

O halde $a_{12} - 5 = 9.3$ ten $a_{12} = 32$ dir.

Bir zorluğu yok değil mi? ☺

Ayrıca aritmetik dizinin genel terimi (n.terimi)

$a_n = a_1 + (n-1)d$
$= a_2 + (n-2)d$
$= a_3 + (n-3)d$

Mantığıyla bulunabilir.

1. **Bir aritmetik dizinin ilk terimi 3, ortak farkı 4 olduğuna göre, onuncu terimi kaçtır?**

2. **Bir aritmetik dizinin ilk terimi 25, ortak farkı – 3 olduğuna göre, beşinci terimi kaçtır?**

3. **Bir aritmetik dizide üçüncü terim 5, dokuzuncu terim 47 olduğuna göre, bu dizinin ortak farkı kaçtır?**

4. **Bir aritmetik dizinin beşinci terimi 8, onuncu terimi 43 olduğuna göre, yirminci terimi kaçtır?**

5. **İkinci terimi 6 ve beşinci terimi 24 olan bir aritmetik dizinin genel terimi nedir?**

6. **Üçüncü terimi 4 ve yedinci terimi 32 olan bir aritmetik dizinin genel terimi nedir?**

7. Genel terimi a_n olan bir aritmetik dizide

   $a_{25} - a_{13} = 60$ **olduğuna göre bu dizinin ortak farkı kaçtır?**

8. Genel terimi a_n olan bir aritmetik dizide

   $a_{13} = 75$ **ve** $a_7 = 33$ **olduğuna göre bu dizinin ortak farkı kaçtır?**

9. Genel terimi a_n olan bir aritmetik dizide

   $a_{11} = 52$ **ve d = – 3 olduğuna göre,** a_5 **kaçtır?**

10. Genel terimi a_n olan bir aritmetik dizide

    $a_{20} = -34$ **ve d = 4 olduğuna göre,** a_7 **kaçtır?**

11. Genel terimi a_n olan bir aritmetik dizide

    $a_{12} - a_7 = 20$ **olduğuna göre,** $a_{15} - a_{12}$ **farkı kaçtır?**

12. Genel terimi a_n olan bir aritmetik dizide

    $a_{13} - a_4 = 36$ **ve** $a_2 = 3$ **olduğuna göre,** a_3 **kaçtır?**

1. Genel terimi a_n olan bir aritmetik dizide

   $a_{10} - a_8 = 10$ **ve** $a_1 = 2$ **olduğuna göre,** a_{10} **kaçtır?**

2. Genel terimi a_n olan bir aritmetik dizide

   $a_3 - a_2 = 4$

   $a_4 + a_5 = 24$

   olduğuna göre, a_4 **kaçtır?**

3. Genel terimi a_n olan bir aritmetik dizide

   $a_2 + a_3 = 11$

   $a_4 + a_5 = 23$

   olduğuna göre, a_6 **kaçtır?**

Aslında şu sonucu siz de çıkarabilirsiniz☺

Bir aritmetik dizide eşit sayıdaki terimin alt indisleri toplamı eşitse toplamları da eşittir.

Örneğin, $a_1 + a_8 = a_3 + a_6$ dır.

Aynı şekilde, $a_5 + a_{10} = a_3 + a_{12}$ dir.

Ben öylesine kafama göre yazdım. Çoğaltabilirsiniz bunları. Yeter ki eşitliğin sağ ve sol tarafında eşit sayıda terim (genelde ikişer tane olur) olsun. Ve bu terimlerin alt indisleri toplamı eşit olsun.

4. **Bir aritmetik dizide** $a_5 + a_{11} = 40$ **olduğuna göre,**

   $a_7 + a_9$ **toplamı kaçtır?**

5. Genel terimi a_n olan bir aritmetik dizi için

   $\frac{a_3 + a_{16}}{a_9 + a_{10}}$ **oranı kaçtır?**

6. Genel terimi a_n olan bir aritmetik dizi için

   $\frac{a_1 + a_4 + a_7 + a_{10}}{a_5 + a_6}$ **oranı kaçtır?**

7. Bir aritmetik dizinin ardışık dört terimi 7, x, y ve 13 tür.

   Buna göre, x + y toplamı kaçtır?

8. Bir aritmetik dizinin ardışık altı terimi a, 4, b, c, 8 ve d olduğuna göre, a + b + c + d toplamı kaçtır?

9. $\frac{1}{4} < x < y < z < t < \frac{7}{4}$

sırlamasında ardışık her iki sayının farkı eşit olduğuna göre, x + y + z + t toplamı kaçtır?

Aritmetik dizilerde herhangi bir terim kendisine sağdan ve soldan eşit uzaklıktaki iki terimin toplamının yarısına eşittir. (Aritmetik ortalama gibi bir şey☺)

Yani, $\frac{a_1 + a_3}{2} = a_2$, $\frac{a_4 + a_{10}}{2} = a_7$, ... dir.

10. Bir aritmetik dizide $a_2 + a_8 = 24$ olduğuna göre, a_5 kaçtır?

11. Bir aritmetik dizide $a_2 = 7$, $a_8 = 10$ olduğuna göre, a_{14} kaçtır?

12. Bir aritmetik dizide $a_3 = x$, $a_{13} = y$ olduğuna göre, a_{23} ün x ve y türünden değeri nedir?

Aritmetik dizi de ardışık üç terim verilmişse ortadaki terim diğer ikisinin toplamının yarısına eşit olur.

13. Ardışık üç terimi sırasıyla

$2m + 1$, $4m - 3$, $5m + 2$

olan dizinin bir aritmetik dizi tanımlaması için m kaç olmalıdır?

14. Bir aritmetik dizinin ardışık üç terimi sırasıyla

$3m + 1$, $3m + 5$, $5m - 3$

olduğuna göre, m kaçtır?

15. x in hangi değeri için

$x + 1$, $3x - 1$, $4x + 1$

sayıları bir aritmetik dizinin ardışık üç terimi olabilir?

1. Bir aritmetik dizinin ilk üç terimi sırasıyla,

$\log_2(x-1)$, 3 ve $\log_2 16$

olduğuna göre, x kaçtır?

2. Bir aritmetik dizinin ilk üç terimi sırasıyla,

$\sin^2 20°$, x, $\cos^2 20°$

olduğuna göre, x kaçtır?

3. Bir aritmetik dizinin ardışık üç terimi sırasıyla

$a - 2b$, 5 ve $2b + 4$

olduğuna göre, a kaçtır?

İki sayı arasına (bu sayılarla birlikte) aritmetik dizi oluşturacak şekilde belli sayıda terim yerleştirilirse...

Taa... En başta söylediğim şeyler yeterli aslında. Bunun için yeni bir formülcüğe gerek yok.☺

Örnek Soru

3 ve 78 sayıları arasına bu sayılarla birlikte aritmetik dizi oluşturacak biçimde 14 terim yerleştiriliyor.
Oluşturulan aritmetik dizinin ortak farkı kaçtır?

Çözelim☺

İlk terim 3, son terim 78. Araya 14 terim yerleştirilmiş. Yani bu dizide toplam 16 terim var.

$\underbrace{3}_{a_1} \underbrace{\ldots\ldots\ldots}_{14 \text{ terim}} \underbrace{78}_{a_{16}}$

Dolayısıyla oluşturulan aritmetik dizide

$a_1 = 3$ ve $a_{16} = 78$ dir.

Bu iki terim yardımıyla dizinin ortak farkını (d yi) bulcaz.

$a_{16} - a_1 = 15d$ den $78 - 3 = 15d$ ve $d = 5$ tir.

Bence formüle gerek yok. Ama mutlu olacaksanız vereyim☹☹

4. 5 ve 85 sayıları arasına bu sayılarla birlikte aritmetik dizi oluşturacak şekilde 15 terim yerleştiriliyor.
Oluşan dizinin ortak farkı kaçtır?

5. – 2 ve 94 sayıları arasına bu sayılarla birlikte aritmetik dizi oluşturacak şekilde 11 terim yerleştiriliyor.
Oluşan dizinin ortak farkı kaçtır?

6. – 3 ve 24 sayıları arasına bu sayılarla birlikte aritmetik dizi oluşturacak şekilde 8 terim yerleştiriliyor.
Oluşan dizinin ortak farkı kaçtır?

7. 11 ve 83 sayıları arasına bu sayılarla birlikte ortak farkı 4 olan bir aritmetik dizi oluşturacak şekilde n tane terim yerleştiriliyor.
Buna göre, n kaçtır?

8. 8 ve x sayıları arasına bu sayılarla birlikte ortak farkı 7 olan bir aritmetik dizi oluşturacak şekilde 10 tane terim yerleştiriliyor.
Buna göre, x kaçtır?

9. 10 ve 100 sayıları arasına, bu sayılarla birlikte aritmetik dizi oluşturacak şekilde 17 terim yerleştiriliyor.

Oluşturulan bu dizinin 10. terimi kaçtır?

10. -8 ve 48 sayıları arasına, bu sayılarla birlikte aritmetik dizi oluşturacak şekilde 13 terim yerleştiriliyor.

Oluşturulan bu dizinin 6. terimi kaçtır?

Bir aritmetik dizinin ilk n teriminin toplamı

İlk n terim toplamı s_n ile gösterilir.

$s_n = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n$ demektir. Yani, ilk 5 terim toplamı yerine $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5$ değilde s_5 yazabilirsiniz.

Dolayısıyla $s_3 = a_1 + a_2 + a_3$

$s_{10} = a_1 + a_2 + ... + a_{10}$ demek oluyor.

Bu ilk n terimin toplamı için küçük bir formülcük var☺ Onu vereyim.

$s_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$ dir. Yani ilk ve son terimi toplayıp terim sayısının yarısıyla çarpıyoruz.

Örnek Soru

İlk terimi 4, ortak farkı 2 olan aritmetik dizinin ilk yirmi terim toplamı kaçtır?

Çözelim☺

$a_1 = 4$ ve $d = 2$ verilmiş.

Sorulan s_{20} nin değeri. Bunun için bize a_{20} lâzım.

$a_{20} = a_1 + 19d = 4 + 19.2 = 42$ yi bulduktan sonra

$s_{20} = \frac{20}{2}(a_1 + a_{20}) = 10(4 + 42) = 460$ ı bulursunuz artık☺

11. **İlk terimi 10, ortak farkı 3 olan aritmetik dizinin ilk on iki terim toplamı kaçtır?**

12. **Birinci ve 30. terimlerinin toplamı 40 olan bir aritmetik dizinin ilk 30 terim toplamı kaçtır?**

1. Genel terimi, a_n olan bir dizide

$a_1 = 3, \quad d = 5$

olduğuna göre, bu dizinin ilk 20 terim toplamı kaçtır?

2. Genel terimi, a_n olan bir dizide

$a_1 = 3, \quad a_2 = 7$

olduğuna göre, bu dizinin ilk 15 terim toplamı kaçtır?

3. Genel terimi, a_n olan bir dizinin ilk n terim toplamı s_n olmak üzere,

$a_5 - a_4 = 2$, $a_{18} = 40$ **olduğuna göre,** s_{18} **kaçtır?**

4. Yaşları toplamı 50 olan dört arkadaşın yaşları bir aritmetik dizinin ardışık dört terimidir.

En küçüğünün yaşı 11 olduğuna göre, en büyüğünün yaşı kaçtır?

5. Konveks bir dörtgenin iç açıları sonlu bir aritmetik dizi oluşturmaktadır.
En küçük iç açısı 50° olduğuna göre, en büyük iç açısı kaç derecedir?

6. Genel terimi, a_n olan bir dizide

$a_5 + a_{19} = 20$ **olduğuna göre, bu dizinin ilk 23 terim toplamı kaçtır?**

7. **Onuncu terimi 15 olan bir aritmetik dizinin ilk 19 teriminin toplamı kaçtır?**

8. Genel terimi a_n olan bir aritmetik dizide,

$a_6 = 12, \quad a_{14} = 44$

olduğuna göre, ilk on terim toplamı kaçtır?

9. **İlk terimi 5, son terimi 55 olan sonlu bir aritmetik dizinin terimlerinin toplamı 420 olduğuna göre, bu dizinin terim sayısı kaçtır?**

$s_5 - s_4 = a_5$ tir. Nedenini izah edeyim.

$s_5 - s_4 = (a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5) - (a_1 + a_2 + a_3 + a_4)$

Yani ilk 5 terim toplamından ilk dördünü çıkarınca sadece beşinci terim kalıyor.

Aynı şekilde $s_9 - s_8 = a_9$, $s_{15} - s_{14} = a_{15}$ tir.

10. Bir aritmetik dizide ilk n terim toplamı s_n olmak üzere,

$s_n = n^2 + 2n$ **olduğuna göre, bu dizinin beşinci terimi kaçtır?**

11. Bir aritmetik dizide ilk n terim toplamı s_n olmak üzere,

$s_n = 2n^2 + 3n$ **olduğuna göre,** a_4 **kaçtır?**

12. Bir aritmetik dizide ilk n terim toplamı s_n olmak üzere,

$s_n = 3n^2 + n$ **olduğuna göre,** $a_3 + a_4$ **toplamı kaçtır?**

13. 9 ve 61 sayıları arasına bu sayılarla birlikte aritmetik dizi oluşturacak şekilde 18 terim yerleştiriliyor.

Oluşturulan aritmetik dizinin terimlerinin toplamı kaçtır?

14. Bir aritmetik dizide ilk n terim toplamı s_n olmak üzere,

$s_6 - s_5 = 12$

$s_8 - s_7 = 20$

olduğuna göre, dizinin ortak farkı (d) kaçtır?

15. Bir aritmetik dizide ilk n terim toplamı s_n olmak üzere,

$s_4 - s_3 = 7$

$s_{10} - s_9 = 25$

olduğuna göre, s_6 **kaçtır?**

GEOMETRİK DİZİ

Geometrik dizide çok fazla bir şey yok.
Geometrik dizide ardışık her iki terimin oranı daima sabittir.

(a_n) geometrik dizi ise $\frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2} = ... = \frac{a_n}{a_{n-1}} = r$ dir.

Buradaki r sayısına dizinin **ortak çarpanı** denir.
Geometrik dizi sorularını çözerken işinize en çok yarayacak olan şey şu;

$a_{10} = a_1 . r^9$ veya $a_{10} = a_2 . r^8$ veya $a_{10} = a_4 . r^6$

veya $a_{10} = a_5 . r^5$ ... yazılabilir.

Hangisi işe yarayacaksa o şekilde kullanmak lâzım.
Buradan varacağınız nihai netice şu: Bir geometrik dizinin herhangi iki terimi veya bir terimi ile ortak çarpanı (r si) verilirse bir sürü şeyi bulabilirsiniz.
Geometrik dizinin n. terimi yani (genel terimi) ise

$a_n = a_1 . r^{n-1} = a_2 . r^{n-2} = a_3 . r^{n-3} = ...$ biçiminde ifade edilebilir.

Aritmetik ve geometrik dizi sorularının hepsi çok basit mantıklarla çözülebilir. Yeter ki anlattığım şeyleri iyi öğrenin.
Ama bu söylediğim, en basit soruları bile içinden çıkılmaz hale getirme konusunda mahir olanlar için değil tabii ki.☺

1. **İlk terimi 3 ve ortak çarpanı 2 olan geometrik dizinin 5. terimi kaçtır?**

2. **Üçüncü terimi $\frac{3}{4}$ ve ortak çarpanı 2 olan geometrik dizinin 9. terimi kaçtır?**

3. **İkinci terimi $\frac{3}{5}$ ve ortak çarpanı $\sqrt{5}$ olan geometrik dizinin 8. terimi kaçtır?**

4. **İlk terimi 2, altıncı terimi 64 olan geometrik dizinin ortak çarpanı kaçtır?**

5. **Üçüncü terimi $\frac{2}{3}$, dördüncü terimi 18 olan geometrik dizinin ortak çarpanı kaçtır?**

6. **İlk terimi 4 ve ortak çarpanı 3 olan geometrik dizinin kaçıncı terimi 324 tür?**

7. Altıncı terimi 96, ortak çarpanı 2 olan geometrik dizinin ilk terimi kaçtır?

8. Genel terimi a_n olan pozitif terimli geometrik dizi için, $a_1 = 3$ **ve** $a_5 = 48$ **olduğuna göre, bu dizinin ortak çarpanı (r) kaçtır?**

9. Genel terimi a_n olan pozitif terimli geometrik dizi için, $a_1 = 54$ **ve** $a_7 = 2$ **olduğuna göre, bu dizinin ortak çarpanı (r) kaçtır?**

10. Bir geometrik dizinin 10. terimi 6. teriminin 5 katı olduğuna göre, 15. terimi 7. teriminin kaç katıdır?

Bir geometrik dizide alt indisleri toplamı eşit olan eşit sayıdaki terimin çarpımları da eşittir.
Örneğin, $a_1 \cdot a_9 = a_3 \cdot a_7$ dir.
Aynı şekilde $a_5 \cdot a_{12} = a_8 \cdot a_9$, $a_2 \cdot a_8 = a_4 \cdot a_6$ yazılabilir.
Bunlar ezberlenecek şeyler değil tabii ki. Bir mantığı vermek için öylesine yazdım☺
Şimdi anladınız mı ne demek istediğimi?

Yine aynı mantıkla $a_1 \cdot a_9 = a_5 \cdot a_5$ ten

$a_1 \cdot a_9 = (a_5)^2$ yazılabilir.

11. Genel terimi a_n olan geometrik dizide $a_1 \cdot a_9 = 30$ **olduğuna göre,** $a_4 \cdot a_6$ **çarpımı kaçtır?**

12. Genel terimi a_n olan geometrik dizide $a_5 \cdot a_{15} = 2$ **ve** $a_9 \cdot a_{11} = 3x - 10$ **olduğuna göre, x kaçtır?**

13. Genel terimi a_n olan pozitif terimli geometrik dizide $a_3 \cdot a_7 = 64$ **olduğuna göre,** a_5 **kaçtır?**

Bir geometrik dizide,

$a_1 \cdot a_3 = (a_2)^2$

$a_2 \cdot a_6 = (a_4)^2$

$a_3 \cdot a_7 = (a_5)^2$ dir.

Buradan bir sonuç çıkarabildiniz mi?
İki terimin çarpımı bu terimlerin ortasında bulunan terimin karesine eşit oluyor☺
Örneğin, birinci ve üçüncü terimin çarpımı, bunların ortasındaki ikinci terimin karesine eşittir.

Yani, $a_1 \cdot a_3 = (a_2)^2$ dir.

1. Genel terimi a_n olan pozitif terimli geometrik dizide $a_1 \cdot a_5 = 25$ **olduğuna göre,** a_3 **kaçtır?**

2. a tam sayı olmak üzere,
$3a - 2, a + 1, a + 3$
sayıları bir geometrik dizi oluşturduğuna göre, a kaçtır?

3. İlk üç terimi sırasıyla x – 3, x – 1 ve x + 3 olan geometrik dizinin ikinci terimi kaçtır?

4. Ardışık üç terimi sırasıyla x – 1, x ve x + 2 olan geometrik dizinin beşinci terimi kaçtır?

5. tan15°, x ve tan75° terimleri pozitif terimli bir geometrik dizinin ardışık üç terimi olduğuna göre, x kaçtır?

6. $\log_2 9$, m, $\log_3 4$
sayıları pozitif terimli bir geometrik dizinin ardışık üç terimi olduğuna göre, m kaçtır?

7. 5 terimli bir geometrik dizinin terimlerinin çarpımı 32 olduğuna göre, bu dizinin 3. terimi kaçtır?

8. Pozitif terimli bir geometrik dizinin ilk terimi 2 ve ilk üç teriminin toplamı 26 olduğuna göre, ortak çarpanı kaçtır?

9. Pozitif terimli bir geometrik dizinin ilk terimi 2 ve ilk üç teriminin çarpımı 64 olduğuna göre, ortak çarpanı kaçtır?

10. Pozitif terimli bir geometrik dizinin ilk terimi 3 ve ilk üç teriminin toplamı 21 olduğuna göre, dördüncü terimi kaçtır?

11. Genel terimi a_n olan pozitif terimli geometrik dizi için,

$a_1 + a_2 = 8$

$a_2 + a_3 = 24$

olduğuna göre, dizinin ortak çarpanı kaçtır?

12. İlk terimi 3 olan pozitif terimli bir geometrik dizide, $a_3 + a_5 = 60$ **olduğuna göre, dizinin ortak çarpanı kaçtır?**

Bir geometrik dizinin ilk n terim toplamı

Geometrik dizinin ilk n terim toplamı şu şekilde bulunuyor. (İspata girmiycem☺)

$s_n = a_1 + a_2 + ... + a_n = a_1 \cdot \frac{1-r^n}{1-r}$ dir.

Bu da geometrik dizi de bilmeniz gereken tek formül☺

13. İlk terimi 1 ve ortak çarpanı 2 olan bir geometrik dizinin ilk 10 terim toplamı kaçtır?

14. İlk terimi 2 ve ortak çarpanı 3 olan bir geometrik dizinin ilk 12 terim toplamı kaçtır?

1. İlk terimi 1, ikinci terimi 3 olan bir geometrik dizinin ilk 10 terim toplamı kaçtır?

2. Üçüncü terimi 12, beşinci terimi 48 olan pozitif terimli bir geometrik dizinin ilk 20 terim toplamı kaçtır?

3. İlk sekiz terim toplamının ilk dört terim toplamına oranı 5 olan pozitif terimli bir geometrik dizinin ortak çarpanı kaçtır?

4. Bir geometrik dizinin ilk altı terim toplamının ilk üç terim toplamına oranı 28 dir.
Bu dizinin kinci terimi 2 olduğuna göre, beşinci terimi kaçtır?

5. Bir geometrik dizinin ilk on terim toplamının ilk beş terim toplamına oranı 33 olduğuna göre, bu dizinin ortak çarpanı kaçtır?

6. İlk terimi 2, ortak çarpanı 3 olan bir geometrik dizinin ilk n terim toplamı $3^{24} - 1$ **olduğuna göre, n kaçtır?**

7. İlk üç teriminin toplamı 21, çarpımı 216 olan artan bir geometrik dizinin dördüncü terimi kaçtır?

8. İlk üç teriminin toplamı 7, çarpımı 8 olan artan bir geometrik dizinin ortak çarpanı kaçtır?

Terimler hem aritmetik, hem geometrik dizi oluşturuyorsa bu terimlerin hepsi birbirine eşittir.

9. $a-3,\ 2a+b$ ve $2a+1$

sayıları hem aritmetik hem de geometrik dizi oluşturduğuna göre b kaçtır?

10. $x \neq 0$ olmak üzere,

$4xy,\ 2x+y$ ve x^2y

sayıları hem aritmetik hem de geometrik dizi oluşturduğuna göre x kaçtır?

11. $y > 0$ olmak üzere,

$2x+y,\ 3xy$ ve $\frac{3x}{y}$

sayıları hem aritmetik hem de geometrik dizi oluşturduğuna göre x + y toplamı kaçtır?

12. $2^{x+y},\ 2^{3x-5}$ ve 16

sayıları hem aritmetik hem de geometrik dizi oluşturduğuna göre x – y farkı kaçtır?

13. Ardışık dört terimi

$a+b,\ \ 2a+6,\ \ a^2+2c,\ \ 5b$

olan dizi hem aritmetik hem de geometrik dizi belirttiğine göre, c kaçtır?

14. x tam sayı olmak üzere,

$2,\ x,\ y,\ 9$

sayılarının ilk üçü bir aritmetik dizinin, son üçü ise bir geometrik dizinin ardışık üç terimi olduğuna göre, x.y çarpımı kaçtır?

15. İlk terimi 2 olan bir aritmetik dizinin birinci, üçüncü ve dokuzuncu terimleri artan bir geometrik dizinin ilk üç terimidir.

Bu geometrik dizinin beşinci terimi kaçtır?

Aradığını bilmeyen, bulduğunu anlayamaz.

Cladue Bernard

Fonksiyonlar

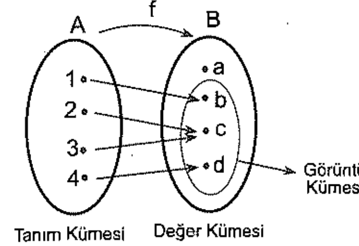
İlk çağlarda güçlü olan, endüstri çağında zengin olan kazanırdı. Bilgi çağında ise bilgili olan kazanacaktır.
A. Toffler

Üstelemek başarının temel unsurudur. Kapıyı yeterince uzun süre ve yüksek sesle çalarsanız, birilerini uyandıracağınızdan emin olabilirsiniz.
Henry Wadsworth Longfellow

FONKSİYONLAR

A kümesinin her bir elemanını B kümesindeki yalnızca bir elemanla eşleyen A dan B ye her bağıntıya **fonksiyon** denir ve

$f : A \to B$ biçiminde gösterilir.



Burada, A kümesi fonksiyonun **tanım kümesi**, B kümesi de fonksiyonun **değer kümesi**dir.

Tanım kümesi = A = {1, 2, 3, 4}

Değer kümesi = B = {a, b, c, d}

Verilen f fonksiyonunda $f : 1 \to b$ dır. Ve bu f(1) = b biçiminde ifade edilir. Bu **"1 in f fonksiyonu altındaki görüntüsünün b olduğu"** anlamına gelir.

Aynı şekilde f(2) = c, f(3) = c ve f(4) = d dir. Bu fonksiyon f = {(1,b), (2,c), (3,c), (4,d)} biçiminde ifade edilebilir. Dikkat ettiyseniz fonksiyonun görüntü kümesi f(A) = {b, c, d} dir.

Fonksiyonda görüntü (değer) bulma olayı

Bir fonksiyonda x e (değişkene) uygun koşullarda her değer verilebilir. Yeter ki x gördüğünüz her yere aynı değeri yazmayı unutmayın.
(Ama x gördüğünüz her yere aynı değeri yazmazsanız yamulma olasılığınız yüksek☺)
Bakın Canlar! Bu söylediğim şeyler acayip derecede önemli.
Ne demek istediğimi daha iyi anlamak için inceleyin bakalım şu çözümlü örneği.

Örnek Soru

f(x) = 4x + 2 olduğuna göre,

a) f(4) değeri kaçtır?

b) $f\left(\frac{3}{4}\right)$ **değeri kaçtır?**

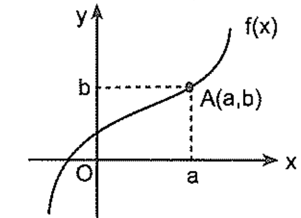
Çözelim☺
Bu tür soruları çözerken şunu unutmayın yeter. Fonksiyonda x yerine değer yazarken o eşitlikte x gördüğünüz her yere aynı değeri yazmak lâzım. Yoksa cevap çıkmıyor da☺
Bakalım.

a) x = 4 için f(4) = 4.4 + 2 = 18 dir.

b) $x = \frac{3}{4}$ için $f\left(\frac{3}{4}\right) = 4 \cdot \frac{3}{4} + 2 = 5$ olur.

Fonksiyon grafiği nasıl okunur?

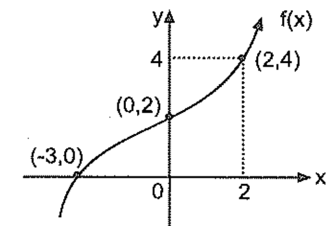
Fonksiyonların grafiğini okuyabilmek acayip önemli. Göreceksiniz zaten. Sadece burada değil, limitte, türevde ve integralde de lâzım olacak. Onun için bu olayı iyi kavramanızda fayda var.☺
Şimdi size yahşi bi grafik çizeyim.



Bu grafik üzerindeki A(a,b) noktasının neyi anlattığını izah edeyim.
Olay şu: f fonksiyonunun grafiği A(a,b) noktasından geçiyorsa f(a) = b ve $f^{-1}(b) = a$ dır.
Anladınız mı?

Örneğin " **f(2) kaçtır?**" sorusunun cevabı ile "fonksiyonun grafiği üzerinde apsisi 2 olan noktanın ordinatı kaçtır?"sorusunun cevabı aynıdır. Çünkü ikisi de aynı soru da ondan☺
Bu da fonksiyonun x = 2 için aldığı değerdir.

Size şimdi a lı b li değil de üzerinde sayılar olan bir grafik çizip onun üzerinde netleştireyim bunu.



Çizdiğimi f fonksiyonunun grafiği (–3,0), (0,2) ve (2,4) noktalarından geçiyor. İşte bunun anlamı

$f(-3) = 0$ ve $f^{-1}(0) = -3$

$f(0) = 2$ ve $f^{-1}(2) = 0$

$f(2) = 4$ ve $f^{-1}(4) = 2$ dir.

Meselâ yukarıdaki grafiğe göre şöyle bir şey sorulabilir: "(fof)(0) kaçtır?"

İlk önce şunu hatırlayın. (fof)(0) = f(f(0)) demekti.

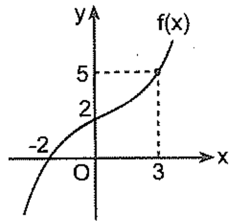
Önce f(0) ın kaç olduğunu görün. f(0) = 2 olduğuna göre, f(f(0)) = f(2) olur.

f(2) de 4 e eşit olduğuna göre (fof)(0) = f(2) = 4 olmuş olur.

Var mı bir zorluğu?

Gerisini antrenmanlara bırakıyorum artık.

1.



Yukarıda grafiği verilen f fonksiyonuna göre,

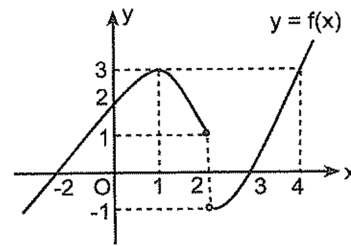
a) **f(–2) + f(0) + f(3) toplamı kaçtır?**

b) $f^{-1}(0)+f^{-1}(5)$ **toplamı kaçtır?**

2. f fonksiyonunun grafiği A(2, 5) ve B(1, 2) noktalarından geçmektedir.

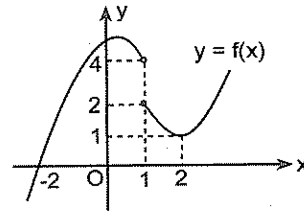
Buna göre, f(2) + f(1) toplamı kaçtır?

3.



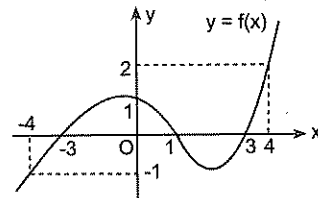
Yukarıda grafiği verilen f fonksiyonuna göre, f(–2) + f(0) + f(2) toplamı kaçtır?

4.



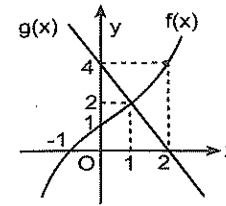
Şekilde grafiği verilen f fonksiyonuna göre, f(–2) + (fof)(2) toplamı kaçtır?

5.



Şekilde grafiği verilen f fonksiyonuna göre, $\frac{(fofof)(3)+f(4)}{f(-4)}$ **oranı kaçtır?**

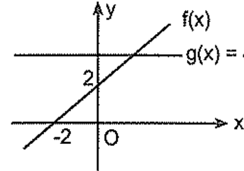
1.



Şekilde dik koordinat düzleminde f ve g fonksiyonlarının grafikleri verilmiştir.

Buna göre, $(f^{-1}og)(0)$ **kaçtır?**

2.



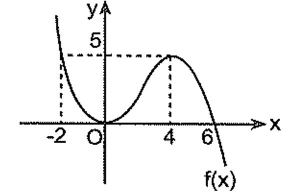
Şekilde f ve g doğrularının grafikleri verilmiştir.

Buna göre, (gof)(8) + f(0) toplamı kaçtır?

3. Reel sayılarda tanımlı f fonksiyonu A(2, 5) noktasından geçmektedir.

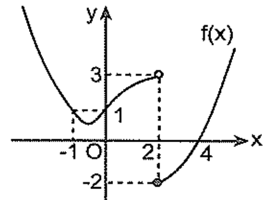
$f(x+1) = x^2 + bx + 1$ **olduğuna göre, b kaçtır?**

4.



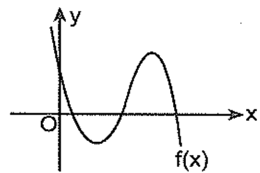
Yukarıda grafiği verilen f fonksiyonuna göre, f(x) = 5 eşitliğini sağlayan x değerleri toplamı kaçtır?

5.



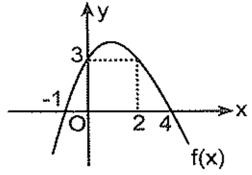
Yukarıda grafiği verilen f fonksiyonuna göre, f(–1) . f(2) çarpımı kaçtır?

6.



Şekilde grafiği verilen f fonksiyonuna göre, f(x) = 0 eşitliği x in kaç farklı değeri için doğrudur?

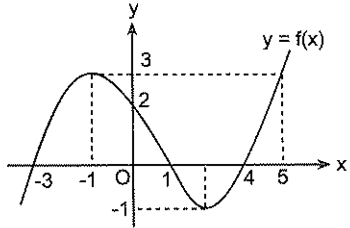
7.



Şekilde f fonksiyonunun grafiği verilmiştir.

Buna göre, f(x+1) = 3 eşitliğini sağlayan x değerleri toplamı kaçtır?

8.

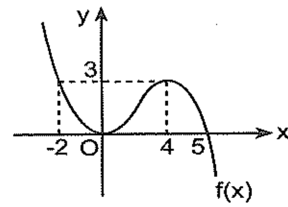


Şekilde grafiği verilen f fonksiyonuna göre,

a) **f(x) = 0 eşitliğini sağlayan x değerleri toplamı kaçtır?**

b) **f(x) = 2 eşitliği x in kaç farklı değeri için doğrudur?**

9.



Yukarıda grafiği verilen f fonksiyonuna göre,

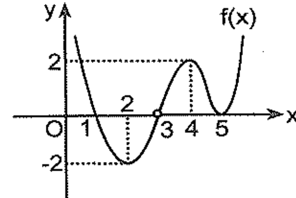
a) **f(x) = 3 eşitliğini sağlayan x değerleri toplamı kaçtır?**

b) **f(x) = 2 eşitliği x in kaç farklı değeri için doğrudur?**

c) **| f(x) | = 2 eşitliğini sağlayan kaç farklı x değeri vardır?**

d) **| f(x) – 2 | = 1 eşitliğini sağlayan kaç farklı x değeri vardır?**

10.



Yukarıda grafiği verilen f fonksiyonuna göre,

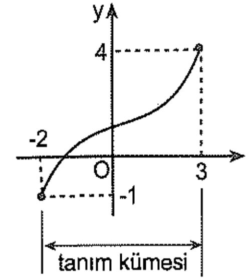
a) **f(x – 1) = 0 eşitliğini sağlayan x değerleri toplamı kaçtır?**

b) **| f(x) | = 2 eşitliği x in kaç farklı değeri için doğrudur?**

c) **| | f(x) | – 2 | = 1 eşitliğini sağlayan kaç farklı x değeri vardır?**

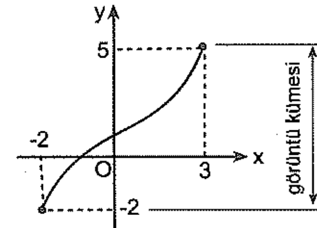
Grafiği verilen bir fonksiyonun tanım ve görüntü kümesi nasıl bulunur?

Hatırlayın.☺ **Fonksiyonun tanım kümesi x in alabileceği değerlerin kümesiydi.**
Grafik çizip de göstereyim.

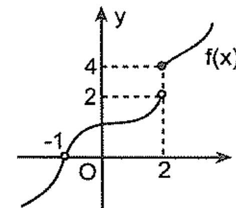


Üstte çizdiğim fonksiyonun tanım kümesi [-2, 3] tür. (Grafiğin sağ ve sol sınırları)

Görüntü kümesi ise x in değerlerine karşılık fonksiyonun (y nin) aldığı değerlerin kümesiydi.
Yine grafikle göstereyim.

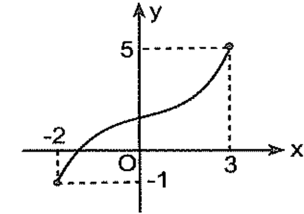


Üstteki fonksiyonun görüntü kümesi [-2, 5] tir. (Grafiğin alt ve üst sınırı)
Şimdi biraz daha değişik bi şey çizelim.



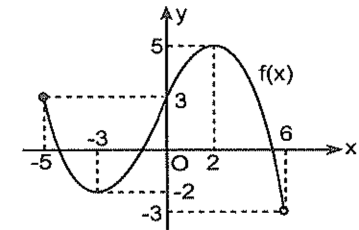
Aynı mantıkla bu fonksiyonun
Tanım kümesi:(– ∞,– 1) ∪ (–1,∞)
Görüntü kümesi (– ∞,0) ∪ (0,2) ∪ [4,∞) dur.
Anladınız mı?
Geçtim.☺
Antrenmanları çözünce daha iyi anlarsınız... ☺

1. f: [a,b] → [c, d]



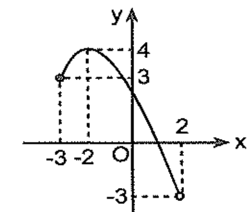
Şekilde grafiği verilen birebir örten f fonksiyonu için b.d – a.c farkı kaçtır?

2.



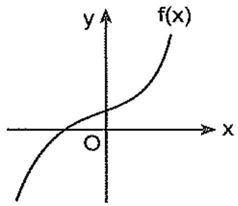
Şekilde grafiği verilen fonksiyonun tanım ve görüntü kümesi nedir?

3.



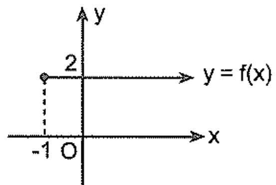
Şekilde grafiği verilen fonksiyonun tanım ve görüntü kümesi nedir?

4.



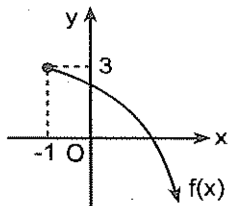
Şekilde grafiği verilen fonksiyonun tanım ve görüntü kümesi nedir?

5.



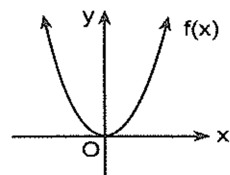
Yukarıda grafiği verilen fonksiyonun tanım ve görüntü kümesi nedir?

6.



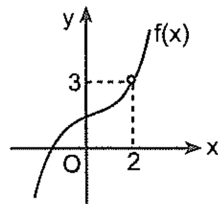
Şekilde grafiği verilen fonksiyonun tanım ve görüntü kümesi nedir?

7.



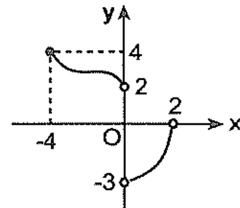
Şekilde grafiği verilen fonksiyonun tanım ve görüntü kümesi nedir?

8.



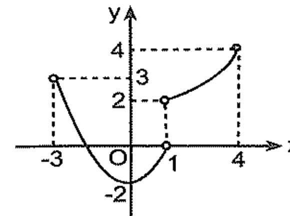
Yukarıda grafiği verilen fonksiyonun tanım ve görüntü kümesi nedir?

9.



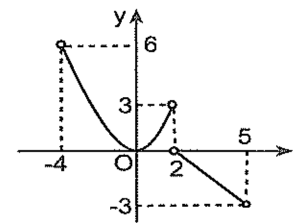
Şekilde grafiği verilen fonksiyonun tanım ve görüntü kümesi nedir?

1.



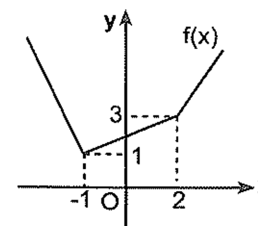
Şekilde grafiği verilen fonksiyonun tanım ve görüntü kümesi nedir?

2.



Şekilde grafiği verilen fonksiyonun tanım ve görüntü kümesi nedir?

3.



Şekilde grafiği verilen f fonksiyonunun görüntü kümesinin en küçük elemanı (yani fonksiyonun alabileceği en küçük değer) kaçtır?

Tanım kümesi ve kuralı verilen bir fonksiyonun görüntü kümesi nasıl bulunur?

İlk önce şunu hatırlayın. Fonksiyonun tanım kümesi ne demekti?

Tanım kümesi, bir fonksiyonda x in alabileceği değerlerin kümesiydi. Buradan hareketle bir fonksiyonun tanım kümesi yani, x in aldığı değerlerin kümesi verilmiş ve görüntü kümesi istenmişse x in bu değerlerine karşılık y nin alabileceği değerlerin kümesi bulunabilir. Bu biraz cebirsel yetenek isteyebilir tabii ki☺

Kısacası buradaki olay x in değerlerine karşılık y nin hangi değerleri alabileceğini bulma olayı.

Örnek Soru

(2, 5] te tanımlı

$f(x) = 3x - 2$

fonksiyonunun görüntü kümesi (alabileceği değerlerin kümesi) nedir?

Çözelim.☺

x in aralığı (2, 5] verilmiş. Buradan hareketle $3x - 2$ yi elde etcez.

$2 < x \leq 5$ eşitsizliğini 3 ile genişletin.

$6 < 3x \leq 15$ bulmuş olmanız lâzım.

Şimdi her taraftan 2 çıkarın.

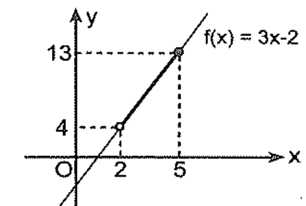
$4 < 3x - 2 \leq 13$ olur. Demek ki x in bu aralıktaki değerleri için $4 < f(x) \leq 13$ oluyormuş.

Ne yaptığımı anladınız mı?

x in tanım aralığından yola çıkarak fonksiyonun kuralını elde ettik.

Bu anlattığım şeyleri grafik üzerinde de görün isterseniz.

Çizeyim.



Evet, f(x) in görüntü kümesi (4, 13] imiş.

Var mı anlaşılmayan bir yer? Ya da anlaşılan?☺

Örnek Soru

[4, 12] da tanımlı

$f(x) = 3\sqrt{2x+1}$

fonksiyonunun görüntü kümesi nedir?

Çözelim☺

Bu tür sorularda yani, tanım kümesinin verilip de görüntü kümesinin istendiği sorularda x in aldığı değerlere karşılık f(x) in aldığı değerleri bulacaksınız.

Ne demek istediğimi bu soruda uygulayarak göstereyim.

Fonksiyonun tanım kümesi [4,12]. Yani, $4 \le x \le 12$ aralığı.

Buradan yola çıkıp f(x) in kuralını elde edin. (Bu kısmı biraz cebirsel yetenek isteyebilir. Ama olsun. Nasılsa sizde çok☺)

İlk önce $4 \le x \le 12$ yi 2 ile genişletin ve $8 \le 2x \le 24$ ü elde edin.

Şimdi de her tarafa 1 ekleyin bakalım.

$9 \le 2x + 1 \le 25$ i buldunuz mu?

Peki, şimdi ne yapmak lâzım?

Hepsinin karekökünü almak. Öyle değil mi?

Şimdi hepsinin karekökünü alın ve şunu bulun.

$\sqrt{9} \le \sqrt{2x+1} \le \sqrt{25}$ i. Yani, $3 \le \sqrt{2x+1} \le 5$ i.

Şimdi de her tarafı 3 ile genişletip bitirin bu işi.☺

Way be. Ne soruymuş.☺

Demek ki $9 \le 3\sqrt{2x+1} \le 15$ yani, $9 \le f(x) \le 15$ imiş.

Bunun anlamı x in [4,12] aralığındaki değerleri için f(x) in aldığı değerler [9,15] aralığındaymış.

Biraz zor bir örnek soru yaptım. Ama kolaylarını çözüp zorlarını size bırakmaya gönlüm razı olmadı☺

4. f: (2, 5) → A

$f(x) = 3x - 2$

fonksiyonunun görüntü kümesi nedir?

5. f: A → B

A = {0, 1, 2} olmak üzere,

$f(x) = 2x + 4$

fonksiyonunun görüntü kümesi nedir?

6. [0, 2] aralığında tanımlı

$f(x) = 3 - 4x$

fonksiyonunun görüntü kümesi nedir?

7. Pozitif reel sayılar kümesinde tanımlı

$f(x) = 3 - \sqrt{x}$

fonksiyonunun görüntü kümesi nedir?

8. [2, 6] aralığında tanımlı

$f(x) = 2\sqrt{4x+1}$

fonksiyonunun görüntü kümesi nedir?

9. f: [- 2, 2] → A

$f(x) = 3\sqrt{4 - x^2}$

fonksiyonunun görüntü kümesi nedir?

1. f : [- 1, 3] → B

$f(x) = x^2 + 1$

fonksiyonunun görüntü kümesi nedir?

2. [- 1, 3] aralığında tanımlı

$f(x) = (x-2)^2 + 1$

fonksiyonunun görüntü kümesi nedir?

3. f : [−2, 2] → A

$f(x) = (x^2 + 2x + 1) + 3$

fonksiyonunun görüntü kümesi nedir?

Şunda ilk önce x + 2 nin karesini elde etmek lâzım.

4. f : [−3, 1] → A

$f(x) = x^2 + 4x + 7$

fonksiyonunun görüntü kümesi nedir?

5. f: R - {2} → A

$f(x) = \frac{x-3}{x-2}$

fonksiyonunun görüntü kümesi nedir?

6. f : [0, 2π] → R

$f(x) = 1 + 2\sin x$

fonksiyonunun görüntü kümesi nedir?

7. f : [1, 15] → R

$f(x) = \log_2(x + 1)$

fonksiyonunun görüntü kümesi nedir?

8. f : [−1, 12] → R

$f(x) = 1 + 2\log_3(2x + 3)$

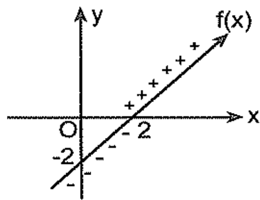
fonksiyonunun görüntü kümesi nedir?

Grafiği verilen bir fonksiyonun işareti

Fonksiyonun işaretinden kastım x in aldığı değerlere karşılık y = f(x) in pozitif mi? Negatif mi olduğu.
İşte burada bunun adını koymaya çalışıyoruz.
Tek cümlelik bir özet isterseniz☺
Grafiğin x ekseninin üstünde olduğu yerlerde fonksiyon pozitif, altında olduğu yerlerde ise negatiftir.

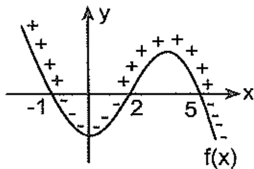
Şu grafikleri incelerseniz ne demek istediğimi daha iyi anlayacaksınız.

Şu grafiklerdeki artı eksileri inceleyin bakalım.



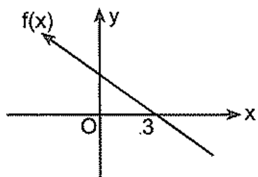
Burada grafiği verilen f fonksiyonu $(-\infty, 2)$ aralığında negatif, $(2, \infty)$ aralığında ise pozitiftir.

Bir de şuna bakın.



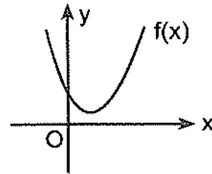
Bu grafikte verilen f fonksiyonu ise
$(-\infty, -1) \cup (2, 5)$ te pozitif,
$(-1, 2) \cup (5, \infty)$ da negatiftir.

9.



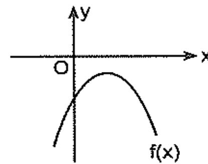
Şekilde grafiği verilen f fonksiyonunun işaretini (pozitif ve negatif olduğu aralıkları) belirleyin.

10.



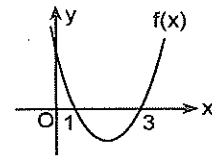
Yukarıda grafiği verilen $f(x) = ax^2 + bx + c$ **fonksiyonunun (parabolünün) işaretini bulunuz.**

11.



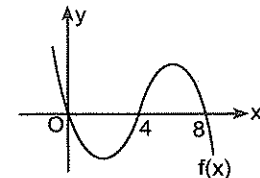
Yukarıda grafiği verilen $f(x) = ax^2 + bx + c$ **fonksiyonunun (parabolünün) işaretini bulunuz.**

12.



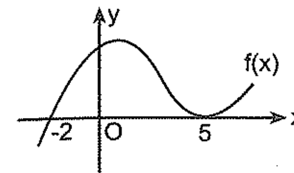
Yukarıda grafiği verilen $f(x) = ax^2 + bx + c$ **fonksiyonunun (parabolünün) işaretini bulunuz.**

13.



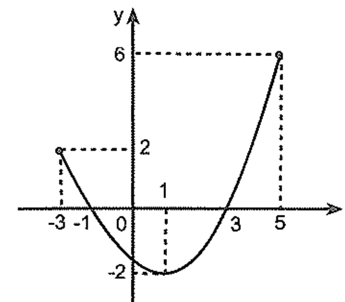
Şekilde grafiği verilen f fonksiyonu x in hangi değerleri için pozitiftir?

1.



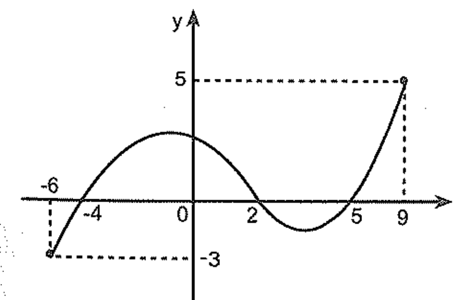
Şekilde grafiği verilen f fonksiyonunun işaretini (pozitif ve negatif olduğu aralıkları) belirleyiniz.

2.



Şekilde grafiği verilen fonksiyonu pozitif yapan tam sayıların toplamı kaçtır?

3.



Şekilde grafiği verilen fonksiyon tanımlı olduğu aralıktaki kaç tam sayı için negatiftir?

Kuralı verilen iki fonksiyonun kesim noktası nasıl bulunur?

Kuralı belli olan iki fonksiyonun kesim noktasının apsisi bütün fonksiyonlar için aynı şekilde bulunur. Fonksiyonların kesim noktasını bulmak için daima şunu yapın. Fonksiyonları birbirine eşitleyin ve kesim noktalarının apsisini (x i) bulun. Bu noktaların ordinatını ise bulunan x değerlerini fonksiyonlardan herhangi birinde yerine yazarak bulun.
Anladınız mı?

Örnek Soru

$f(x) = 3x - 5$
$g(x) = x + 3$

fonksiyonlarının kesim noktasının koordinatları nedir?

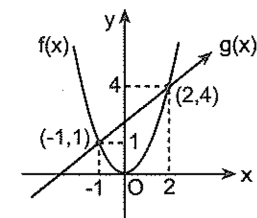
Çözelim.☺
İki fonksiyonu eşitleyerek, yani, f(x) = g(x) diyerek $3x - 5 = x + 3$ ten $x = 4$ ve bu x değeri için $f(4) = g(4) = 7$ olur ki bu da f ve g nin (4,7) noktasında kesiştiği anlamına gelir.
Başka bir örnek daha vereyim.

Örnek Soru
$f(x) = x^2$ **fonksiyonu ile** $g(x) = x + 2$ **fonksiyonunun kesim noktalarının koordinatları nedir?**

Çözelim☺
Yine aynı şeyi yapın. Yani, iki fonksiyonu birbirine eşitleyin.

$f(x) = g(x)$ eşitliğinden $x^2 = x + 2$ denklemini çözerek $x = -1$ ve $x = 2$ yi bulun. İşte bu değerler f ve g nin kesim noktalarının apsisleridir.

Bu noktaların ordinatları (yani, y değerleri) ise $x = -1$ için $y = -1 + 2 = 1$ ve $x = 2$ için $y = 2 + 2 = 4$ olur.
İsterseniz bunu grafik üzerinde de görün. İstemiyorsanız geçebilirsiniz☺



Demek ki bu fonksiyonlar (–1,1) ve (2,4) noktalarında kesişiyorlarmış.

4. $f(x) = 4x - 3$

$g(x) = x + 9$

fonksiyonlarının kesim noktasının koordinatları nedir?

5. $y = 3x - 7$

$y = -2x + 3$

doğrularının kesim noktasının koordinatları nedir?

6. $f(x) = x^2$

$g(x) = 4$

fonksiyonlarının kesim noktaları arasındaki uzaklık kaç birimdir?

7. $f(x) = x^2 + x + 1$

$g(x) = 3x + 9$

fonksiyonlarının kesim noktalarının apsisleri toplamı kaçtır?

8. $f(x) = x^2 + 2x + 1$

$g(x) = 3x + 7$

fonksiyonlarının kesim noktalarının apsisleri çarpımı kaçtır?

9. $f(x) = |2x - 3|$

$g(x) = 5$

fonksiyonlarının kesim noktalarının apsisleri toplamı kaçtır?

10. $f(x) = ||x - 3| - 1|$

$g(x) = 7$

fonksiyonlarının kesim noktalarının apsisleri toplamı kaçtır?

11. $f(x) = \log_2(x - 3)$

$g(x) = 4$

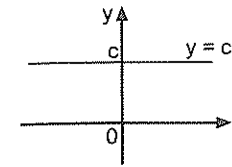
fonksiyonlarının kesim noktasının apsisi kaçtır?

Birebir Fonksiyon

Tanım kümesindeki her bir elemanı değer kümesinin farklı bir elemanına eşleyen fonksiyondur.
Yani, tanım kümesinin her elemanının değer kümesindeki görüntüsü farklıdır.

Sabit Fonksiyon

Tanım kümesinin her elemanının değer kümesindeki görüntüsü aynı olan fonksiyondur. Yani, tanım kümesindeki her eleman değer kümesindeki sabit bir elemana gidiyor.



Meselâ şekildeki sabit fonksiyon grafiğinde x e kaç verirseniz verin yolunuz hep c ye çıkar.
$f(0) = f(1) = f(2) = f(3) = ... = f(x) =$ sabit sayı

Sabit fonksiyonda x li terim olmaz. Zaten x li terim olsa sabit olmaz.☺

Eğer size verilen sorudaki sabit fonksiyonda x li terimler varsa işiniz x li terimleri yok edecek ayarları yapmak olmalı.

- **Polinom türü bir fonksiyon sabit ise x li terimlerin kat sayıları sıfır olmalı.**

Örnek Soru

f sabit fonksiyon olmak üzere,

$$f(x) = (4-a)x^2 + (2b-4)x + 2a - b$$

olduğuna göre, a + b toplamı kaçtır?

Çözelim☺

f fonksiyonu sabit olduğuna göre içinde x li terim olmaması ya da x li terim varsa kat sayısının sıfır olması lâzım. Zaten fonksiyonda x li terim olursa fonksiyon sabit mabit olmaz.☺

Onun için x^2 nin kat sayısı olan $4 - a = 0$ ve x in kat sayısı olan $2b - 4 = 0$ olması lâzım.

Yani, a = 4 ve b = 2.

Bu değerler için a + b = 6 olur.

Eğer $f(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ fonksiyonu sabit fonksiyon ise $f(x) = \dfrac{a}{c} = \dfrac{b}{d}$ dir.

Örnek Soru

f sabit fonksiyon olmak üzere,

$$f(x) = \frac{6x+4}{3x+m}$$

olduğuna göre, m kaçtır?

Çözelim☺

Bu şekildeki bir fonksiyonun sabit olması için pay ve paydadaki x lerin kat sayılarının oranıyla sabit sayıların oranı eşit olması lâzım.

Zaten gerekli olan kuralı üstte verdim. Bu kural ışığında çözüm yaparsanız $f(x) = \frac{6}{3} = \frac{4}{m}$ ve buradan da m yi 2 bulursunuz.

İsterseniz m yerine 2 yazıp da bakın bakalım f fonksiyonu sabit oluyor mu?

Olur ya belki olmaz.☺

Birim (Etkisiz) Fonksiyon

Tanım kümesindeki her elemanı değer kümesinde kendisiyle eşleyen fonksiyondur. Yani, her elemanın görüntüsü kendisidir. I ile gösterilir.

f birim fonksiyon ise

$f(1) = 1$

$f(2) = 2$

$f(3) = 3$

....

$f(x) = x = I$

$f(2x + 3) = 2x + 3$

$f(3x - 1) = 3x - 1$

$f(5x^2 + 3x - 2) = 5x^2 + 3x - 2$

Birim fonksiyonun içi dışı birdir. Yani fonksiyona ne girmişse o çıkar.

Örnek soru

$f(x) = (a - 2)x + b + 5$

fonksiyonu birim fonksiyon olduğuna göre, a.b çarpımı kaçtır?

Çözelim☺

Birim fonksiyonun içi dışı aynıdır. Yani, içerisi x olduğuna göre dışarısı da x e eşit olması lâzım.

Onun için x in katsayısı olan $a - 2 = 1$ olmalı ve x in yanında başka bir şey de olmamalı.

Yani, $b + 5 = 0$ olmalı.

Artık $a.b = -15$ olduğunu bulursunuz.

Örnek Soru

g birim fonksiyon olmak üzere,

$f(3x - g(x+1)) = g(5x+2)$

olduğuna göre, f(5) değeri kaçtır?

Çözelim☺
Çok basit bir soru.
g birim fonksiyon olduğundan $g(x + 1) = x + 1$ ve $g(5x + 2) = 5x + 2$ dir. Öyle ya birim fonksiyonun içi dışı aynı idi.
Dolayısıyla verilen ifadeyi $f(3x - (x + 1)) = 5x + 2$ olarak düzenleyebilirsiniz.
Artık $x = 3$ için $f(5) = 17$ yi bulursunuz.

1. $f: A \to B$ ye birebir ve örten fonksiyon ve

$s(B) = 2n - 3$

$s(A) = n + 4$

olduğuna göre, s(A) kaçtır?

2. f sabit fonksiyon ve

$f(x) = (a + 1)x + 3$

olduğuna göre, a kaçtır?

3. f sabit fonksiyon ve

$f(x) = (a-3)x^2 + (b-2)x + a + b + 1$

olduğuna göre, f(4) kaçtır?

4. f sabit fonksiyon ve

$f(x) = (a + 2)x - 5a + b$

$f(4) = 7$

olduğuna göre, b kaçtır?

5. f sabit fonksiyon ve

$f(x) = x^{n-3} + 3n - 2$

olduğuna göre, f(4) kaçtır?

6. f sabit fonksiyon ve

$f(x) = \frac{mx+4}{x+2}$

olduğuna göre, m kaçtır?

7. f sabit fonksiyon ve

$f(x) = \frac{mx + 2m - 3}{2x+5}$

olduğuna göre, f(0) kaçtır?

1. f sabit fonksiyon ve

$f(x) = \frac{2x-a}{x+b}$

olduğuna göre, f(5) kaçtır?

2. f birim fonksiyon ve

$f(x) = (m - 2)x + n - 3$

olduğuna göre, m + n toplamı kaçtır?

3. f birim fonksiyon ve

$f(2x + 3) = (m - 3)x + 2n - 1$

olduğuna göre, m + n toplamı kaçtır?

4. f birim fonksiyon ve

$f(x) = (a-2)x^2 + (2b+7)x + ab + c$

olduğuna göre, c kaçtır?

5. f birim fonksiyon ve

$f(3x+1) = (a-2)x + 4b - 7$

olduğuna göre, a.b çarpımı kaçtır?

6. f birim fonksiyon ve

$f(x^2 + 4x + 2) = mx^2 + (n-1)x + 3p - 7$

olduğuna göre, m + n + p toplamı kaçtır?

7. f birim fonksiyon ve

$g(3x - f(x - 1)) = 4x + 3$

olduğuna göre, g(5) kaçtır?

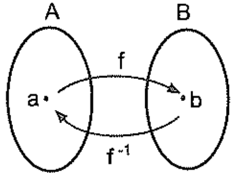
8. g birim fonksiyon ve

$f(g(x - 1)) = g(2x + 3) + 5$

olduğuna göre, f(2) kaçtır?

Ters fonksiyon

f fonksiyonu A dan B ye bire bir örten fonksiyon olmak üzere, tanım ve değer kümelerinin yer değiştirmesiyle elde edilen fonksiyona f nin tersi denir ve f^{-1} ile gösterilir.



$f: A \to B \Leftrightarrow f^{-1}: B \to A$ dır. Buradan da

$f(a) = b \Leftrightarrow f^{-1}(b) = a$ yazılabilir.

Yani, f bire bir örten fonksiyon iken,

$f(3) = 2$ ise $f^{-1}(2) = 3$ tür.

$f(x + 1) = 2x - 1$ ise $f^{-1}(2x-1) = x+1$

$f^{-1}(x-3) = x+2$ ise $f(x+2) = x - 3$ tür.

Ters fonksiyonla ilgili sorularda sayısal bir değerin görüntüsü bulunacaksa büyük bir olasılıkla ters fonksiyonu bulmanıza gerek kalmaz.

Örnek Soru

$$f^{-1}(2x+1) = \frac{3x-2}{5}$$

olduğuna göre, f(2) kaçtır?

Çözelim☺

Soruda sayısal değer sormuşsa kesinlikle fonksiyonun tersini almayın. Zaten daha tersini almayı göstermedim☺

Bu tür sorularda $f(a) = b \Leftrightarrow f^{-1}(b) = a$ mantığını kullanın.

Soruda $f^{-1}(2x+1) = \frac{3x-2}{5}$ olduğuna göre,

$f\left(\frac{3x-2}{5}\right) = 2x+1$ olacaktır.

Buradan da x = 4 için f(2) = 9 bulursunuz artık.

Kuralı verilen bir fonksiyonun tersi nasıl bulunur?

y = f(x) olarak verilen bir fonksiyonun tersi bulunurken yapılacak işlem kesinlikle çok basit. Sadece biraz cebirsel işlem yeteneği gerek☺

İlk önce verilen fonksiyonda x in y = f(x) türünden değerini bulun.

Sonra da x yerine $f^{-1}(x)$ yazın, y = f(x) yerine ise x yazın. Bu kadarcık☺ **Aslında bütün mesele x i yalnız bırakabilmek.**

Örnek Soru

$$f(x) = \frac{5x-3}{2}$$

fonksiyonunun tersi nedir?

Çözelim☺

Bir fonksiyonun tersini bulurken yapacağınız şey her zaman aynıdır. x i yalnız bırakmak. Bunun için sadece birazcık cebirsel yetenek lâzım o kadar.☺

f(x) = y demekti zaten.

$y = \frac{5x-3}{2}$ eşitliğinde 2y = 5x – 3 tür. İtirazı olan var mı?

Buradan 5x = 2y + 3 ve buradan da $x = \frac{2y+3}{5}$ olarak x i yalnız bırakmış olduk.

İşte fonksiyonun tersini bulduk. Sadece küçük bir ayar yapın ve x yerine $f^{-1}(x)$ ve y yerinede x yazın o kadar.

Demek ki $f^{-1}(x) = \frac{2x+3}{5}$ imiş.

Anladınız mı?

Bence olayın temel mantığını anlayın. Yoksa bir sürü fonksiyon yazabilir ve hepsi için formül gibi bir şeyler çıkarabilirim. Ama doğru olanı bu. Yani, ezberlemeden işin mantığını bilerek işlem yapmak. İşin mantığını kaptınız mı gerisi kolay. Göreceksiniz.

Siz de $f(x) = \frac{3x+2}{5}$ fonksiyonunun tersini bulun bakalım $f^{-1}(x) = \frac{5x-2}{3}$ mü çıkıyor?

Bulduysanız bu işi kapmışsınız demektir.

Bir fonksiyonun tersini bulurken aslında bütün mesele ne demiştik?

x i yalnız bırakmak. (Yani, y türünden yazmak.)

1. $f(x) = \frac{6}{x}$

olduğuna göre, $f^{-1}(2)$ kaçtır?

2. $f(x^3+1) = 2x+4$

olduğuna göre, $f^{-1}(6)$ kaçtır?

3. $f^{-1}\left(\frac{x}{3}+1\right) = x+2$

olduğuna göre, f(5) kaçtır?

4. y = f(x) olmak üzere,

$f^{-1}(3x+a) = x-1$

f(3) = 17

olduğuna göre, a kaçtır?

5. f(3x + 1) = mx + 2

$f^{-1}(12) = 7$

olduğuna göre, m kaçtır?

6. **Aşağıdaki fonksiyonların bire bir ve örten oldukları aralıklar için ters fonksiyonları nedir?**

a) f (x) = 3x – 2

b) $f(x) = \frac{x-2}{5}$

c) $f(x) = \frac{3x+2}{-4}$

d) $f(x) = \frac{2x}{3}$

e) $f(x) = \frac{3}{x-2}$

f) $f(x) = \frac{x}{3}+2$

7. **Aşağıdaki fonksiyonların bire bir ve örten oldukları aralıklar için ters fonksiyonları nedir?**

a) $f(x)=\frac{3x+5}{x-2}$

b) $f(x)=\frac{-4x+3}{x-3}$

c) $f(x)=\frac{x+4}{3-x}$

d) $f(x)=\frac{2x+4}{-x+1}$

e) $f(x)=\frac{5}{3x-1}$

f) $f(x)=\frac{4x}{2x+3}$

g) $f(x)=\frac{-3}{2-5x}$

8. **Aşağıdaki fonksiyonların bire bir ve örten oldukları aralıklar için ters fonksiyonları nedir?**

a) $f(x)=\sqrt{x}-2$

b) $f(x)=1+\sqrt{x-2}$

c) $f(x)=\sqrt[3]{x}+2$

d) $f(x)=\frac{\sqrt[3]{x+1}}{2}$

1. a) $f:R^+ \to [4,\infty)$

$f(x)=x^2+4$

fonksiyonunun ters fonksiyonu nedir?

b) $f:[3,\infty)\to[2,\infty)$

$f(x)=(x-3)^2+2$

fonksiyonunun ters fonksiyonu nedir?

c) $f:[2,\infty)\to[-1,\infty)$

$f(x)=x^2-4x+3$

fonksiyonunun ters fonksiyonu nedir?

d) $f:(-\infty,-2]\to[1,\infty)$

$f(x)=x^2+4x+5$

fonksiyonunun ters fonksiyonu nedir?

2. **Aşağıdaki fonksiyonların bire bir ve örten oldukları aralıklar için ters fonksiyonları nedir?**

a) $f(x)=3\sin(x-2)$

b) $f(x)=\arccos\left(\frac{x-1}{2}\right)$

3. **Aşağıdaki fonksiyonların bire bir ve örten oldukları aralıklar için ters fonksiyonları nedir?**

a) $f(x)=\log_3(x+2)$

b) $f(x)=\log_5(2x-3)$

c) $f(x)=1+\log_2(4x-1)$

4. Aşağıdaki fonksiyonların bire bir ve örten oldukları aralıklar için ters fonksiyonları nedir?

a) $f(x)=2^x-3$

b) $f(x)=3\cdot5^{x-2}$

Bileşke fonksiyon

Bileşke fonksiyonda bilmeniz gereken en önemli şey **(fog)(x) = f(g(x))** olduğudur.

İki fonksiyonun bileşkesini bulurken genel kural sağdaki fonksiyonu soldaki fonksiyonda x gördüğünüz yerlere yazmaktır.

Örnek Soru

$f(x) = 2x+5$

$g(x)=x^2+3$

fonksiyonları için (fog)(x) ve (gof)(x) fonksiyonları nedir?

Çözelim☺

Önce (fog)(x) i bulalım. Nasıl bulacağıma dikkat edin.

$(fog)(x) = (2x+5)\ o\ (x^2+3) = 2(x^2+3)+5$

$= 2x^2+11$

Aynı mantıkla (gof)(x) i de bulalım.

$(gof)(x) = (x^2+3)\ o\ (2x+5) = (2x+5)^2+3$

$= 4x^2+20x+28$

Anladınız mı şimdi bileşke işleminin nasıl yapıldığını? Ayrıca bileşke işleminin özelliklerini de bilmek lâzım.

(fog)(x) ≠ (gof)(x)

Fonksiyonlar yer değiştiremezler.

fogoh = (fog)oh = fo(goh)

Yani, parantezi nereye koyarsan koy. Fark etmiyor.

$f^{-1}of = fof^{-1} = I = x$

Yani, bir fonksiyonla bu fonksiyonun tersinin bileşkesi birim fonksiyonu (x i) verir.

$f\,o\,I = I\,o\,f = f$

Bir fonksiyonla (f ile) birim fonksiyonun bileşkesi f ye eşit olur.

$(fog)^{-1} = g^{-1}of^{-1}$

Bileşke fonksiyonun tersi alınırken fonksiyonlar hem yer değiştiriyor hem de tersleri alınıyor.

Peki, fog bileşke fonksiyonu verildiğinde f ve g yi nasıl yalnız bırakabilirsiniz?

Tabii ki çok mantıklı bir işlemle. Şöyle ki:

$(fog)\,og^{-1} = f$

$f^{-1}o(fog) = g$ dir. (Bir fonksiyonla tersi bileşke işleminde yan yana gelince ikisi birden oradan kaybolurlar.)

Meselâ üstte ilkinde g yi yok edip f yi, ikincisinde ise f yi yok edip g yi elde ettik.

Örnek Soru

$f\left(\frac{x-2}{3}\right)=x^2+1$

olduğuna göre, f(x) in eşiti nedir?

Çözelim☺

Bu çok klasik ama aynı zamanda çok da önemli bir soru.

f nin parantez içinin x olmasını istiyoruz.

Çok basit.☺ Bunun için parantez içindeki ifadenin (yani, $\frac{x-2}{3}$ ün) tersini bulup x olan her yere yazın.

Önce tersini bulun tabii ki. $\frac{x-2}{3}$ ün tersi 3x + 2 idi değil mi? İşte x yerlerine bunu yazacaksınız.

Artık yazar ve $f(x)=(3x+2)^2+1$ i bulursunuz. İsterseniz parantez kareyi de açabilirsiniz. Müsaade ediyorum.☺

Oldu mu şimdi?

1. $f(x)=x^2+2$

$g(x) = 4x-1$

olduğuna göre, f(g(1)) kaçtır?

2. $f(x) = x+3$

$g(x) = 5x-1$

olduğuna göre, (fog)(1) kaçtır?

3. $f(x)=x^2+x+1$

$g(x) = 2x+1$

$h(x) = x-3$

olduğuna göre, f(g(h((4)) kaçtır?

4. $f(x)=x^2+2x$

$g(x-1) = 3x-1$

olduğuna göre, (fog)(0) değeri kaçtır?

5. $f(x)=x^2+x$

olduğuna göre, (fof)(2) değeri kaçtır?

6. $f(x) = 3x+n$

olduğuna göre, (fof)(2) = 30 olduğuna göre, n kaçtır?

7. $f(x) = 2x+3$

$g(x) = 4x-1$

olduğuna göre, (fog)(x) nedir?

8. $f\left(x^2+2x\right)=3x^2+6x-1$

olduğuna göre, f(x) in eşiti nedir?

9. $\left(fog^{-1}\right)(x)=x^2+x+1$

$g(x) = 2x + 1$

olduğuna göre, f(x) in eşiti nedir?

10. $(fog)(x)=8x^2-3$

$f(x) = 2x + 1$

olduğuna göre, g(x) in eşiti nedir?

11. $(fog)(x)=8x^2-3$

$g(x) = 2x + 1$

olduğuna göre, f(x) in eşiti nedir?

12. $f(x-2)=x^2$

olduğuna göre, f(x) in eşiti nedir?

13. $f(2x+3)=x^2+1$

olduğuna göre, f(x) in eşiti nedir?

14. $f\left(\frac{x-3}{2}\right)=x^2-1$

olduğuna göre, f(x) in eşiti nedir?

15. $\left(g^{-1}of\right)(x)=\frac{2x+p}{3x-5}$

$f(x) = 2x + 1$

olduğuna göre, g(2) = 3 olduğuna göre, p kaçtır?

16. $(fog)(x)=\frac{3x+c}{x-2}$

$g(3) = 2$

$f(2) = 15$

olduğuna göre, c kaçtır?

Permütasyon Fonksiyon

Permütasyon fonksiyonlar, tanım ve değer kümeleri aynı olan bire bir ve örten fonksiyonlardır. Permütasyon fonksiyonun gösterimi biraz değişik. Bir parantez içinde iki sıradan oluşuyor. Üst sıra tanım kümesi, alt sıra ise değer kümesidir.

Örneğin

{a, b, c, d} kümesinde bir f fonksiyonu tanımlayayım.

$f=\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ d & c & a & b \end{pmatrix}\begin{array}{l} \to \text{Tanım kümesi} \\ \to \text{Değer kümesi} \end{array}$

Yazdığım bu fonksiyonda

f(a) = d, f(b) = c, f(c) = a ve f(d) = b dir.

dolayısıyla da $f^{-1}(a)=c$, $f^{-1}(b)=d$ dir.

Anlaşıldı mı bu olay?

Örnek Soru

A = { a, b, c, d } kümesinde tanımlı

$f=\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ c & d & b & a \end{pmatrix}$ $g=\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ b & c & d & a \end{pmatrix}$

fonksiyonları için f^{-1}, g^{-1} ve fog fonksiyonları nedir?

Çözelim☺

Hatırlayın. Bir fonksiyonun tersi alınırken tanım ve değer kümeleri yer değiştiriyordu. Yalnız burada harfleri karışık değil de sırayla yazın.

Dolayısıyla

$f^{-1}=\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ d & c & a & b \end{pmatrix}$ ve $g^{-1}=\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ d & a & b & c \end{pmatrix}$ olur.

Bileşke işleminde ise

Diyelim ki (fog)(a) yı bulmak istiyorsunuz.

(fog)(a) = f(g(a)) = f(b) = d dir. Aynen bunun gibi b, c ve d için de aynı işlemi yapmak lâzım.

Bu işlemleri yaparsanız fog fonksiyonunu

$fog=\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ c & d & b & a \end{pmatrix} o \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ b & c & d & a \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ d & b & a & c \end{pmatrix}$

olarak bulmuş olursunuz.

Var mı bi problem?

Aslında anlatırken daha kısa bu. Ama yazarak anlatınca uzun gibi duruyor.☺

1. $f=\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ b & d & c & a \end{pmatrix}$

olduğuna göre,

a) f(a) değeri neye eşittir?

b) $f^{-1}(a)$ nın değeri nedir?

c) f(f(b)) değeri nedir?

2. $f=\begin{pmatrix} a & b & c & d & e \\ e & d & a & c & b \end{pmatrix}$

olduğuna göre,

a) f(f(b)) değeri nedir?

b) (fofof)(e) değeri nedir?

3. $f=\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ b & d & c & a \end{pmatrix}$

olduğuna göre, f(f(x)) = b eşitliğini sağlayan x değeri nedir?

4. $f=\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ c & d & b & a \end{pmatrix}$ $g=\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ b & c & d & a \end{pmatrix}$

olduğuna göre, f(g(b)) değeri nedir?

5. $f=\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ c & d & b & a \end{pmatrix}$ $g=\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ b & c & d & a \end{pmatrix}$

olduğuna göre, $f^{-1}(g(a))$ değeri nedir?

6. $f=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&1&4&2\end{pmatrix}$ $g=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&3&2&1\end{pmatrix}$

olduğuna göre, $f\left(g^{-1}(3)\right)$ kaçtır?

7. $f=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\5&1&4&2&3\end{pmatrix}$ $g=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\3&2&5&1&4\end{pmatrix}$

olduğuna göre, $f^{-1}\left(g^{-1}(2)\right)$ kaçtır?

8. $f=\begin{pmatrix}a&b&c&d\\b&d&a&c\end{pmatrix}$ $g=\begin{pmatrix}a&b&c&d\\c&b&a&d\end{pmatrix}$

olduğuna göre, $g\left(f\left(g^{-1}(d)\right)\right)$ değeri nedir?

9. A = { a, b, c, d } kümesinde tanımlı f ve g fonksiyonları

$f=\begin{pmatrix}a&b&c&d\\c&d&b&a\end{pmatrix}$ $g=\begin{pmatrix}a&b&c&d\\b&c&d&a\end{pmatrix}$

olduğuna göre, fog fonksiyonunun eşiti nedir?

10. A = { 1, 2, 3, 4 } kümesinde tanımlı f ve g fonksiyonları

$f=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&1&2&3\end{pmatrix}$ $g=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&1&4&2\end{pmatrix}$

olduğuna göre, (hog)(x) = f(x) eşitliğini sağlayan h fonksiyonu nedir?

Tek ve Çift Fonksiyonlar

Bu tanımları yeni duyuyor olabilirsiniz.
Grafiği y eksenine göre simetrik olan fonksiyonlara **çift fonksiyon**, başlangıç noktasına yani, orijine göre simetrik olan fonksiyonlara ise **tek fonksiyon** denir.

Tek ve çift fonksiyonlarla ilgili olarak size en çok şunlar lâzım olacak.
Çift fonksiyonlar $f(-x)=f(x)$,
Tek fonksiyonlar ise $f(-x)=-f(x)$ şartını sağlarlar.

Bir de şunu bilin yeter☺
Polinom türü tek fonksiyonlarda çift dereceli terim olmaz. Çift fonksiyonlarda da tek dereceli terim.

Örnek Soru
f çift fonksiyon olmak üzere,

$f(x)=(a-2)x^3+ax^2+(b+1)x+ab$

olduğuna göre, f(2) değeri kaçtır?

Çözelim☺
Soru çok zor gibi durmuyor. Aslında f(2) yi bulmak sorun değil. Ama önce a ve b nin kaç olduğunu bulmak lâzım.
f çift fonksiyon olduğundan bunda tek dereceli terim olmaması lâzım. Eğer varsa da kat sayılarının sıfır olması gerek.
Dolayısıyla bunda tek dereceli olan $(a-2)x^3$ ve $(b+1)x$ terimlerinin katsayıları sıfır olmalı.
Yani, a = 2 ve b = − 1 olmalı.
Bu değerler için $f(x)=2x^2-2$ ve f(2) de 6 bulunur.
Anlaşıldı mı? Zor değil di mi ?

Örnek Soru
f fonksiyonunun grafiği orijine göre simetriktir.

$f(x)=6x^3+f(-x)+2x$

olduğuna göre, f(1) değeri kaçtır?

Çözelim☺
Grafiği orijine göre simetrik olan fonksiyon tek fonksiyon idi.
İyi de bu ne işe yarayacak. Onu da söyleyeyim.
Tek fonksiyonda f(− x) = − f (x) olduğundan
Verilen eşitlik $f(x)=6x^3-f(x)+2x$ olarak yazılabilir ve buradan da $f(x)=3x^3+x$ bulunduktan sonra
f(1) = 4 bulunur.

1. **Aşağıdaki fonksiyonların tek mi çift mi olduğunu bulun bakalım.**

I. $f(x)=2x^3$

II. $f(x)=3x^3+2x$

III. $g(x)=x^2+2$

IV. $h(x)=x^3+x^2$

V. $h(x)=3x^4+2x^2-5$

VI. $f(x)=|x|$

2. f çift fonksiyon olmak üzere,

$2f(-x)+f(x)=6x^2+9$

olduğuna göre, f(1) kaçtır?

3. f tek fonksiyon olmak üzere,

$f(x)=2f(-x)+3x^3+6x$

olduğuna göre, f(2) kaçtır?

Unutmayın☺ Polinom türü bir fonksiyon çift ise tek dereceli, tek ise çift dereceli terim içermez. (Eğer varsa katsayıları sıfır olması lâzım.)

4. f çift fonksiyon olmak üzere,

$f(x)=-3x^2+(2m-8)x+5$

olduğuna göre, m kaçtır?

5. f tek fonksiyon olmak üzere,

$f(x)=(m-2)x^2+(m+3)x$

olduğuna göre, m kaçtır?

6. f çift fonksiyon olmak üzere,

$f(x)=(a-1)x^3+(a+2)x^2$

olduğuna göre, f(3) kaçtır?

7. f çift fonksiyon olmak üzere,

$f(x)=(a+1)x^2+(a-2)x+3a$

olduğuna göre, a kaçtır?

8. f fonksiyonunun grafiği y eksenine göre simetriktir.

$f(x)=4x^2+(m-2)x+m$

olduğuna göre, f(m) kaçtır?

9. f fonksiyonunun grafiği orijine göre simetriktir.

$3f(x) - f(-x) = 2x^3 - 6x$

olduğuna göre, f(4) kaçtır?

10. f fonksiyonunun grafiği orijine göre simetriktir.

$f(x) - f(-x) = 4x^3 - 2x + a - 2$

olduğuna göre, f(a) kaçtır?

11. f çift fonksiyon olmak üzere,

$f(x) = (a-2)x^5 + (b+3)x^3 + x^2 + 2$

olduğuna göre, a + b toplamı kaçtır?

12. f tek fonksiyon olmak üzere,

$f(x) = kx^3 + (k-2)x^2 + m - 1$

olduğuna göre, f(m+k) kaçtır?

Parçalı Fonksiyonlar

Parçalı fonksiyonlarda tanım kümesinin farklı alt aralıklarında kural değişir.

Bir sürü şey söylemeye gerek yok.☺

Kuralı verilen parçalı fonksiyon sorularındaki en önemli şey x e değer verdiğiniz zaman bu değer için hangi parçayı kullanacağınıza doğru karar vermenizdir. Eğer doğru parçayı seçmişseniz sıkıntı yaşamazsınız. Ama seçilen parça yanlış ise geçmiş olsun☺

Örnek üzerinde izah edeyim.

Örneğin,

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x & , x \geq 2 \text{ ise} \\ 2x + 5 & , x < 2 \text{ ise} \end{cases}$$

fonksiyonunda 2 veya 2 den daha büyük değerler için üstteki parçayı yani, $x^2 + 2x$ i, 2 den daha küçük değerler için ise alttaki parçayı yani, 2x + 5 i kullanmak lâzım.

Bu söylediklerim ışığında

f(3) = 15, (3 > 2 olduğu için üsttekini kullandık)

f(2) = 8 (2 = 2 olduğu için üsttekini kullandık)

f(–1) = 3 (–1< 2 olduğu için alttakini kullandık)

Siz de f(0) = 5 olduğunu görün isterseniz.

Hadi bir de bu fonksiyon için (fof)(1) = 63 olduğunu görün bakalım.

Anlaşıldı mı ne demek istediğim?

Bir de şu fonksiyonda sorduğum değerleri hesaplar mısınız?

$$f(x) = \begin{cases} 2 - x^2 & , x \geq 0 \text{ ise} \\ 3x + 2 & , x < 0 \text{ ise} \end{cases}$$

olduğuna göre, f(1) , f(0) ve f(–2) nin kaça eşit olduğunu bulun bakalım.

Ne buldunuz?

f(1) = 1, f(0) = 2 ve f(–2) = – 4 bulduysanız bu işi anlamışsınız demektir.

Dolayısıyla sıkıntı yok. Devam edebilirsiniz.

Bakın ne diycem.

Şu Antrenmanlarla Matematik olayı ile o kadar çok öğrenci matematik öğrendi ki. Ama nasıl?

Çünkü hepsi adam gibi çalıştılar da ondan. Bütün olay pes etmeden çalışmak. Evet. Unutmayın ki

"Matematikte zekâdan önce sabır gelir."

1. $f(x) = \begin{cases} 9 - x^2, & x \geq 1 \text{ ise,} \\ 3x - 1, & x < 1 \text{ ise} \end{cases}$

olduğuna göre, f(1) + f(3) toplamı kaçtır?

2. $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2, & x - 2 \geq 0 \text{ ise,} \\ 2x + 4, & x - 2 < 0 \text{ ise} \end{cases}$

olduğuna göre, f(0) + f(4) toplamı kaçtır?

3. $f(x) = \begin{cases} mx + 2, & x \geq 0 \text{ ise,} \\ 5x + 1, & x < 0 \text{ ise} \end{cases}$

olmak üzere, f(2) = f(–1) olduğuna göre, m kaçtır?

4. $f(x) = \begin{cases} 2x + 4, & x \text{ tek ise,} \\ 6 - 2x, & x \text{ çift ise} \end{cases}$

olduğuna göre, (fof)(–1) kaçtır?

5. $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & x \text{ irrasyonel ise,} \\ 5 - 2x, & x \text{ rasyonel ise} \end{cases}$

olduğuna göre, $f(\sqrt{2}) \cdot f(2)$ çarpımı kaçtır?

6. $f(x) = \begin{cases} |x - m|, & x \geq 3 \text{ ise,} \\ 4 - x, & x < 3 \text{ ise} \end{cases}$

olmak üzere, f(4) = f(1) olduğuna göre, m nin alabileceği değerler çarpımı kaçtır?

7. $f(x) = \begin{cases} 4x, & x \geq 1 \text{ ise,} \\ -x^2 + 1, & -1 < x < 1 \text{ ise,} \\ 2x + 2, & x \leq -1 \text{ ise} \end{cases}$

olduğuna göre,

a) f(2) + f(0) + f(–1) toplamı kaçtır?

b) (fofof)(–1) değeri kaçtır?

8. $f(x) = \begin{cases} x^2 - 4, & x \equiv 0 \pmod 3 \\ -2x + 3, & x \equiv 1 \pmod 3 \\ 2x + 2, & x \equiv 2 \pmod 3 \end{cases}$

olduğuna göre, f(2) + f(3) + f(4) toplamı kaçtır?

9. $f(x)=\begin{cases}3x+2, & x\geq 1 \text{ ise,}\\ -2x+1, & x<1 \text{ ise,}\end{cases}$

olduğuna göre, f(x – 1) fonksiyonunun eşiti nedir?

10. $f(x)=\begin{cases}x+2, & x\geq 0 \text{ ise,}\\ 2-x, & x<0 \text{ ise}\end{cases}$

olduğuna göre, f(3x – 6) fonksiyonunun eşiti nedir?

11. $f(x)=\begin{cases}2x+1, & x\geq 1 \text{ ise,}\\ x+3, & x<1 \text{ ise}\end{cases}$

olduğuna göre, $f^{-1}(7)$ **kaçtır?**

12. $f(x)=4x-8$

$g(x)=\begin{cases}2x^2-6, & x<3 \text{ ise}\\ -4x+2, & x\geq 3 \text{ ise}\end{cases}$

olduğuna göre, (gof)(2) değeri kaçtır?

13. $f(x)=\begin{cases}4, & x\leq 0 \text{ ise}\\ 3x-2, & x>0 \text{ ise}\end{cases}$

$g(x)=\begin{cases}x+3, & x\leq -3 \text{ ise}\\ x^2-2, & -3<x<2 \text{ ise}\\ -2x+1, & x\geq 2 \text{ ise}\end{cases}$

olduğuna göre, (gof)(1) değeri kaçtır?

14. $f: Z \to R$

$g(x)=\begin{cases}2x+1, & x \text{ çift ise}\\ \dfrac{x+1}{2}, & x \text{ tek ise}\end{cases}$

olduğuna göre, $\dfrac{(gog)(5)}{g(2)+g(1)}$ **oranı kaçtır?**

15. $f(x)=3x+1$

$g(x)=\begin{cases}x^3+1, & x<5 \text{ ise}\\ -2x+4, & x\geq 5 \text{ ise}\end{cases}$

olduğuna göre, $(gof^{-1})(10)$ **değeri kaçtır?**

Mutlak Değer Fonksiyonu

Önce şunları hatırlayın bakalım.
Bir sayının mutlak değeri, o sayının sayı doğrusunda sıfıra olan uzaklığıydı. Dolayısıyla negatif olamazdı.

$|f(x)|=\begin{cases}f(x), & f(x)\geq 0 \text{ ise}\\ -f(x), & f(x)\leq 0 \text{ ise}\end{cases}$

Bunun anlamı da şu idi:
Mutlak değerin içi pozitif ise mutlak değerin önemi yoktu. Mutlak değeri kaldırmanızda bir sıkıntı yok. Fakat mutlak değer içi negatif ise mutlak değer eksi " – " parantezinde açılıyordu. (ki sonuç pozitif olsun.)

1. $f(x)=\left|\dfrac{4-2x}{3}\right|$

olduğuna göre, f(8) değeri kaçtır?

2. $1<x<2$ olmak üzere,

$f(x)=|2x-4|-|x-1|$

fonksiyonunun eşiti nedir?

3. $1<x<3$ olmak üzere,

$f(x)=|2x-|3x-3||$

fonksiyonunun eşiti nedir?

Mutlak Değerle İlgili Önemli Özellikler

Mutlak değer içindeki bir ifade eksi ile çarpılabilir. Sonuç değişmez.

Örneğin

$|2-x|=|x-2|$ dir. Aynı şekilde

$|-2-x|=|x+2|$ olarak yazılabilir.

Ha! Bu özellik daha çok mutlak değerli denklem ve eşitsizliklerde lâzım olacak.

Kök derecesi ile kök içindeki ifadenin üssünün aynı olduğu durumlarda; eğer kök derecesi tek ise içerdeki ifadeyi aynen çıkarın. İşaretine filan dokunmayın. Örnek vereyim.

$\sqrt[3]{x^3}=x$

$\sqrt[3]{(-2)^3}=-2$

$\sqrt[3]{(a-b)^3}=a-b$ dir.

Fakat kök derecesi çift ise kök içindeki ifadeyi kök dışına mutlak değer olarak çıkarın. Sonra mutlak değeri de halledersiniz.

Meselâ

$\sqrt{(-3)^2}=|-3|=3$

$\sqrt[4]{(-5)^4}=|-5|=5$

$\sqrt{(x-y)^2}=|x-y|$

Anlaşıldı mı?

4. $\sqrt[3]{(-2)^3}+\sqrt{(-5)^2}+\sqrt{(-3)^2}$

ifadesinin değeri kaçtır?

5. $a<0<b<c$ olduğuna göre,

$|a-2b|-|c-a|+|-2a|$

ifadesinin eşiti nedir?

6. $a < 0 < b$ olduğuna göre,

$$\sqrt[3]{(a-2b)^3} - \sqrt{(2a-b)^2} + \sqrt{b^2}$$

ifadesinin eşiti nedir?

7. $a < 0 < b$ olduğuna göre,

$$\sqrt[3]{(3a-2b)^3} - \sqrt{(a-2b)^2} + \sqrt{4a^2}$$

ifadesinin eşiti nedir?

8. $1 < x < 3$ olmak üzere,

$$f(x) = \sqrt{(x-3)^2} - \sqrt[3]{(x-1)^3}$$

fonksiyonunun eşiti nedir?

9. $1 < x < 2$ olmak üzere,

$$f(x) = |x^2 - 4| - |x+1|$$

fonksiyonunun eşiti nedir?

10. $f(x) = |2x+4| + |2x-2|$

fonksiyonunun $x \in (-2, 1)$ için eşiti nedir?

11. $2 < x < 3$ olmak üzere,

$$f(x) = \frac{9-x^2}{|x-3|} + |3x-6|$$

fonksiyonunun eşiti nedir?

12. $x < 1$ olmak üzere,

$$f(x) = x^2 + \sqrt{(x-1)^2} - 2$$

fonksiyonunun eşiti nedir?

13. $1 < x < 2$ olmak üzere,

$$f(x) = \frac{|x^2-1|}{x-1} + \frac{x^2-4}{|x-2|}$$

fonksiyonunun eşiti nedir?

Mutlak değerli denklemlerin Çözümü

Birinci ve ikinci kitapta vardı. Hatırlayın orada epey bi eğilmiştim bunun üzerine. Ama genel tekrar olsun diye bahsedeyim yine.

1. $|x| = 4$

denkleminin çözüm kümesi nedir?

2. $|x-2| = 3$

denkleminin çözüm kümesi nedir?

3. $\left|\frac{2x+3}{5}\right| = 1$

denkleminin çözüm kümesi nedir?

4. $f(x) = |2x-5|$

$g(x) = 3$

fonksiyonlarının kesim noktalarının apsisleri toplamı kaçtır?

5. $\big||x-2|+4\big| = 5$

denkleminin çözüm kümesi nedir?

6. $\big||x+3|-5\big| = 2$

denkleminin çözüm kümesi nedir?

7. $f(x) = \big||x-3|-2\big|$

$g(x) = 3$

fonksiyonlarının kesim noktalarının apsisleri toplamı kaçtır?

8. $f(x) = \big||x-1|-4\big|$

$g(x) = 2$

fonksiyonlarının kesim noktalarının apsisleri toplamı kaçtır?

9. $3|x-1|+|1-x|=20$

denklemini sağlayan x değerleri toplamı kaçtır?

10. $|2x-4|+|2-x|=12$

denklemini sağlayan x değerleri toplamı kaçtır?

11. $|3x-3|+|2-2x|=15$

denklemini sağlayan x değerleri toplamı kaçtır?

12. $|x-6|=|2x|$

denklemini sağlayan x değerleri toplamı kaçtır?

13. $|3x+1|=|2x+4|$

denklemini sağlayan x değerleri toplamı kaçtır?

14. $|x^2-4|=|3x+6|$

denklemini sağlayan x değerleri toplamı kaçtır?

15. $f(x)=|x^2-16|$

$g(x)=|2x+8|$

fonksiyonlarının kesim noktalarının apsisleri toplamı kaçtır?

16. $|x-2|+3x=4$

denklemini sağlayan x değerleri toplamı kaçtır?

Mutlak değer dışında x li mix li şeyler olursa mutlak değeri bir artı bir de eksi olarak açın. Ama dikkatli olun. Bulduğunuz değerleri ilk denklemde yerine yazın ve kontrol edin. Bazıları sağlamayabilir. Nedenini merak ettiğinizi biliyorum. Ama siz yine de benim dediğim gibi çözün.☺

1. $|3x-5|=x+1$

denklemini sağlayan x değerleri toplamı kaçtır?

2. $x|x-3|=4$

denklemini sağlayan x değerleri toplamı kaçtır?

İşte şıklardan gideceğiniz bir iki soru☺

3. $|x-2||x+3|=2x+2$

denklemini aşağıdaki x değerlerinden hangisi sağlar?

A) – 3 B) – 1 C) 1 D) 2 E) 3

4. $|x^2-5||x-2|=x+1$

denklemini aşağıdaki x değerlerinden hangisi sağlar?

A) – 4 B) – 1 C) 1 D) 3 E) 5

Kritik değerleri (mutlak değerin içini sıfır yapan değerler) farklı iki mutlak değer içeren denklemlerde mutlak değerleri bir artı artı, bir artı eksi, bir eksi artı, bir de eksi eksi olarak dört durumda da açın ve bulduğunuz değerlerin ilk denklemi sağlayıp sağlamadığını kontrol edin.

5. $|x+4|+|x-1|=7$

denklemini sağlayan x değerleri toplamı kaçtır?

6. $2|x|+|x+1|=5$

denklemini sağlayan x değerleri toplamı kaçtır?

7. $|x-2|+|x+3|=11$

denkleminin çözüm kümesi nedir?

8. $f(x)=|2x-4|$

$g(x)=7-|x+4|$

fonksiyonlarının kesim noktalarının apsisleri toplamı kaçtır?

Mutlak Değerli Eşitsizliklerin Çözümü

$|f(x)| < a$ ise $-a < f(x) < a$ idi.

9. $|x-2| < 1$

eşitsizliğinin çözüm kümesi nedir?

10. $|x-1| \leq 3$

eşitsizliğini sağlayan tam sayıların toplamı kaçtır?

11. $\left|\frac{x+3}{2}\right| \leq 1$

eşitsizliğini sağlayan tam sayıların toplamı kaçtır?

12. $f(x) = |2x+1|$

$g(x) = 3$

olduğuna göre, f(x) ≤ g(x) eşitsizliği x in kaç farklı tam sayı değeri için doğrudur?

$a < |f(x)| < b$ ise $a < f(x) < b$ veya $a < -f(x) < b$ idi.

13. $2 < |x| < 5$

eşitsizliğini sağlayan tam sayıların çarpımı kaçtır?

14. $1 < |x-2| < 4$

eşitsizliğinin çözüm kümesi nedir?

15. $1 \leq |x-1| < 3$

eşitsizliğini sağlayan tam sayıların toplamı kaçtır?

16. $\frac{1}{2} \leq \left|\frac{x-1}{2}\right| < 2$

eşitsizliğini x in kaç farklı tam sayı değeri için doğrudur?

1. $1 \leq \left|\frac{x}{3}-1\right| \leq 2$

eşitsizliğini sağlayan pozitif tam sayıların toplamı kaçtır?

2. $||x-1|-2| \leq 1$

eşitsizliğinin çözüm kümesi nedir?

$|f(x)| > a$ ise $f(x) > a$ veya $-f(x) > a$ idi.

3. $|x| > 1$

eşitsizliğinin çözüm kümesi nedir?

4. $|2x+1| \geq 3$

eşitsizliğinin çözüm kümesi nedir?

5. $\left|\frac{x+1}{2}\right| \geq 3$

eşitsizliğinin çözüm kümesi nedir?

6. $|0{,}3x-1| > 2$

eşitsizliğini sağlayan en büyük negatif tam sayı kaçtır?

7. $|2x-3| > 11$

eşitsizliğini sağlayan en küçük pozitif tam sayı ile en büyük negatif tam sayının toplamı kaçtır?

8. $x - 2y = 5$

$|4y-1| > 5$

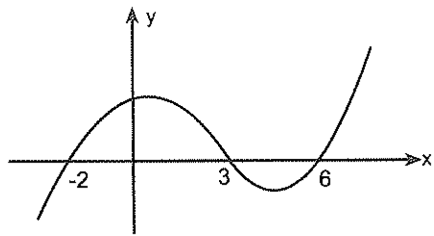
olduğuna göre, x in alabileceği en küçük pozitif tam sayı kaçtır?

Mutlak değer fonksiyonunun Grafiği

y = | f(x) | biçiminde tanımlanan fonksiyonlara mutlak değer fonksiyonu deniyor.

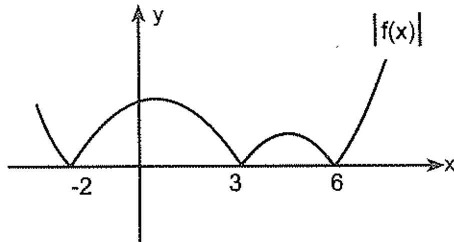
Bir fonksiyonun mutlak değerinin grafiği çizilirken fonksiyonun pozitif olduğu kısımlar (x ekseninin üst tarafındaki parçaları) aynen kalır, negatif olduğu kısımların (x ekseninin alt tarafındaki parçaların) ise x eksenine göre simetriği alınır.

Örneğin,



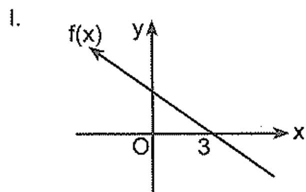
Şekilde grafiği verilen f fonksiyonunun mutlak değeri olan | f(x) | in grafiğini çizerken,

Yapacağınız tek şey x ekseninin altında kalan kısmın x eksenine göre simetriğini almak. (Simetrinin ne demek olduğunu biliyor olmanız lâzım. ☺)
İşte yukarıdaki fonksiyonun mutlak değerinin grafiği☺

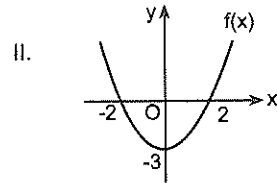


Siz de grafiklerini çizdiğim şu fonksiyonların mutlak değerlerinin grafiğini çizin bakalım.
(Yeniden çizmenize gerek yok. Çizdiğim grafik üzerinde de gösterebilirsiniz. ☺)

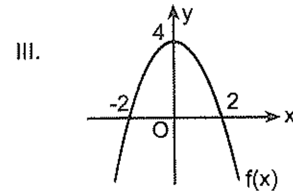
I.



II.



III.

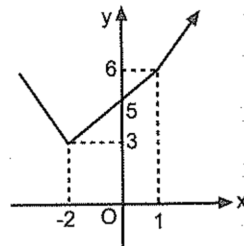


Bu şekilde yani, grafiği verilen bir fonksiyonun mutlak değerinin grafiğini çizmek kolay. x ekseninin altında kalan kısmı x ekseninin üstüne taşıyoruz o kadar. Ama fonksiyonun kuralını verip de grafiğini isterse bunun grafiğini çizmek baya bi zahmetli. (Korkmayın, Zaten ben de çizmiycem☺ Ama soruları yapabileceksiniz yine☺
Yine de meraklıları için söyleyeyim. Aslında mutlak değer fonksiyonu parçalı olarak yazılabilir. Ve daha sonra da bu parçalı fonksiyonun grafiği çizilerek grafik çizimi halledilmiş olur.
Fakat özellikle test sorularında kesinlikle grafik çizimiyle uğraşmak hiç de akıl kârı değil. Test tekniğine göre çözmek daha akıllıca. Onu da anlatcam. Merak etmeyin. Ben sizi bu konuda cahil bırakır mıyım hiç☺

Bir iki şeyi bilin yeter.
Birincisi, mutlak değer fonksiyonlarının grafikleri kritik noktalarında (içini sıfır yapan x değerlerinde) kırılır.
İkincisi de eksenleri kesim noktalarına bakın.
Belki üçüncü olarak grafik üzerinde olan bazı noktaları görmek gerekebilir. Ama çoğu zaman ilk ikisi yeter. Göreceksiniz.
Örneğin bu söylediklerimi şu grafikte görün isterseniz.

$y = 2|x+2| + |x-1|$

fonksiyonunun grafiği şu:

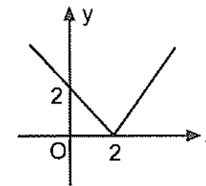


Bu grafik y eksenini x = 0 için y = 5 olduğundan 5 te kesiyor. Ve mutlak değerlerin içini sıfır yapan kritik noktalarda kırılıyor.
Ayrıca kritik değerlerde x = – 2 için y = 3 olduğundan kırılma noktalarından biri (– 2, 3) diğeri de x = 1 içi y = 6 olduğundan (1,6) noktasında kırılıyor.

Grafiği verilen mutlak değer fonksiyonunu bulma (Test soruları için)

Bir iki şeyi bilin yeter.
Birincisi; mutlak değer fonksiyonunun grafiği, mutlak değerlerin içini sıfır yapan x değerlerinde (kritik değerlerde) kırılır.
İkincisi de
x = 0 için y nin kaç olduğuna bakın. Çoğu zaman bunlar yeterli olur. Olmazsa kritik değerler için y değerinin kaç olduğuna bakın. Eğer bu da olmazsa bir alo dersiniz artık☺

1.



Yukarıda grafiği verilen fonksiyon aşağıdakilerden hangisidir?

A) $y = |x+2|$

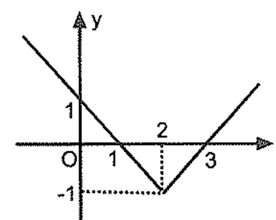
B) $y = |x-1| - 2$

C) $y = |x-2|$

D) $y = 2|x-1|$

E) $y = 2 - |x|$

2.



Yukarıda grafiği verilen fonksiyon aşağıdakilerden hangisidir?

A) $y = |x-1| + 1$

B) $y = |x-1| - |x-3|$

C) $y = |x+2| - 1$

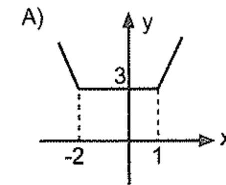
D) $y = |x-2| - 1$

E) $y = 1 - |x-2|$

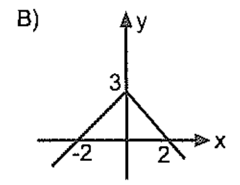
3. $y = |x+2| + |x-1|$

fonksiyonunun grafiği aşağıdakilerden hangisi olabilir?

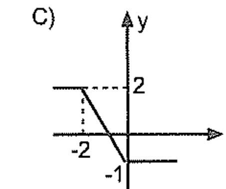
A)



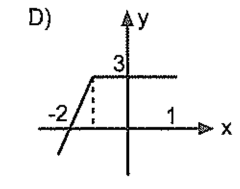
B)



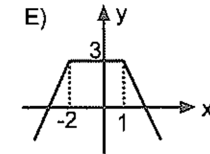
C)



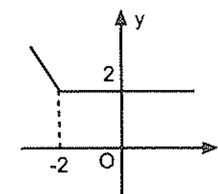
D)



E)



4.



Yukarıda grafiği verilen fonksiyon aşağıdakilerden hangisidir?

A) $y = |x-2| + 2$

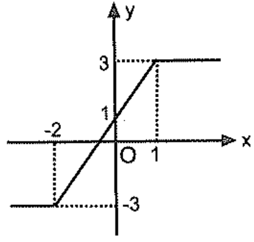
B) $y = |x+2| - x$

C) $y = |x+2| + x$

D) $y = |x-2| - x$

E) $y = x - |x+1|$

5.



Yukarıda grafiği verilen fonksiyon aşağıdakilerden hangisidir?

A) $y=|x-1|+|x+2|$

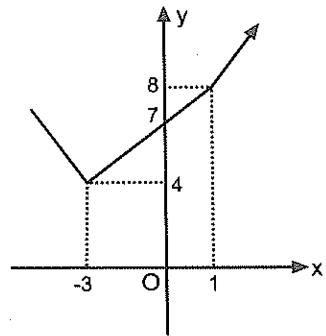
B) $y=|x+2|-|x-1|$

C) $y=|2x+4|-|x-2|$

D) $y=|x-1|-|x+3|$

E) $y=|3x-3|-|x+1|$

6.



Yukarıda grafiği verilen fonksiyon aşağıdakilerden hangisidir?

A) $y=|x-1|+|x+3|$

B) $y=|2x-2|+|x+3|$

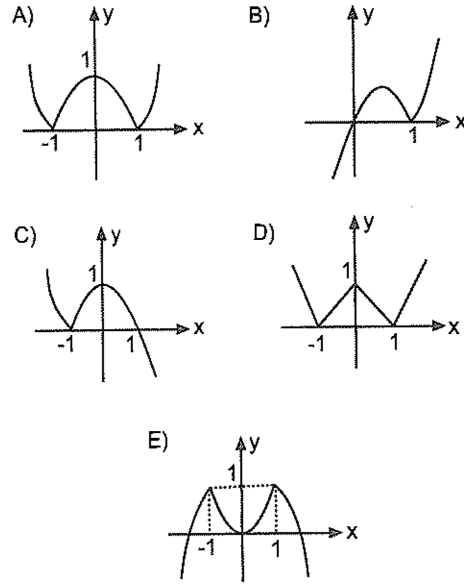
C) $y=|2x+6|+|x-1|$

D) $y=|x+1|+|2x-6|$

E) $y=|3x-3|+|x+1|$

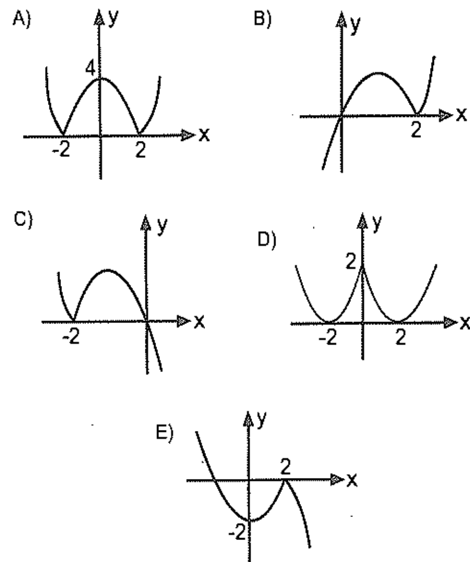
7. $y=|1-x^2|$

fonksiyonunun grafiği aşağıdakilerden hangisi olabilir?

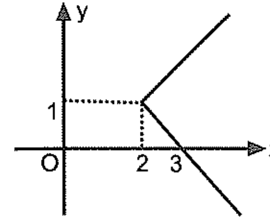


8. $y=x|x-2|$

fonksiyonunun grafiği aşağıdakilerden hangisi olabilir?



1.



Yukarıda grafiği verilen bağıntı aşağıdakilerden hangisi olabilir?

A) $y=|x-1|+2$

B) $x=|2y-2|+1$

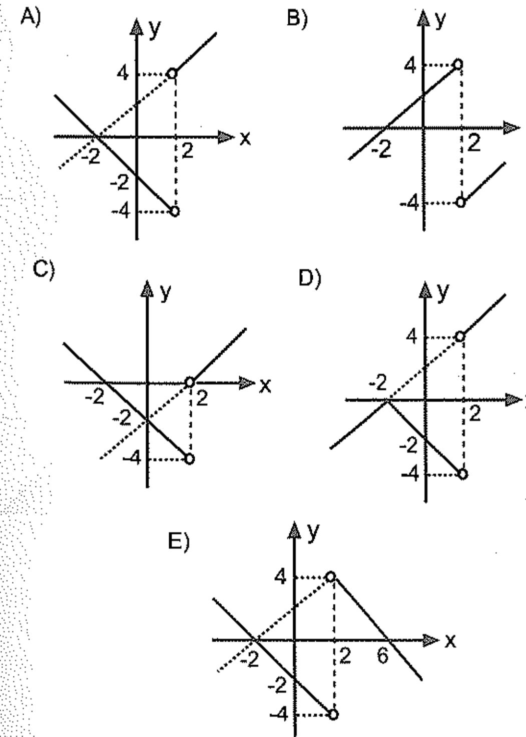
C) $x=|y-2|+1$

D) $x=|y-1|+2$

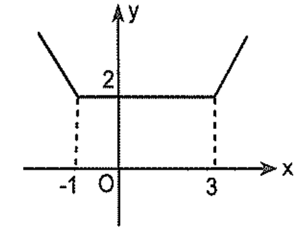
E) $y=|x-2|+1$

2. $y=\dfrac{x^2-4}{|x-2|}$

fonksiyonunun grafiği aşağıdakilerden hangisi olabilir?



3.



Yukarıda grafiği verilen fonksiyon aşağıdakilerden hangisidir?

A) $y=|x-1|+|2x+6|$

B) $y=|x-3|+|x+1|$

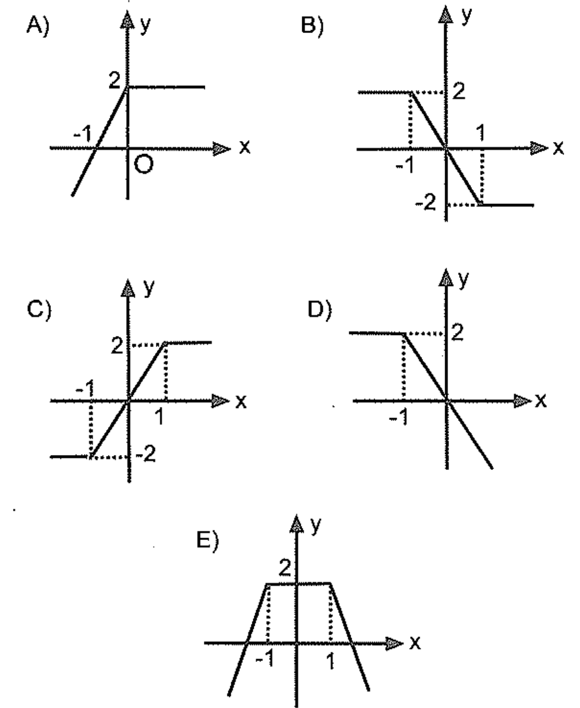
C) $y=|x-1|+|x-3|$

D) $y=\left|\dfrac{x+1}{2}\right|+\left|\dfrac{x-3}{2}\right|$

E) $y=|3x-1|+|x+3|$

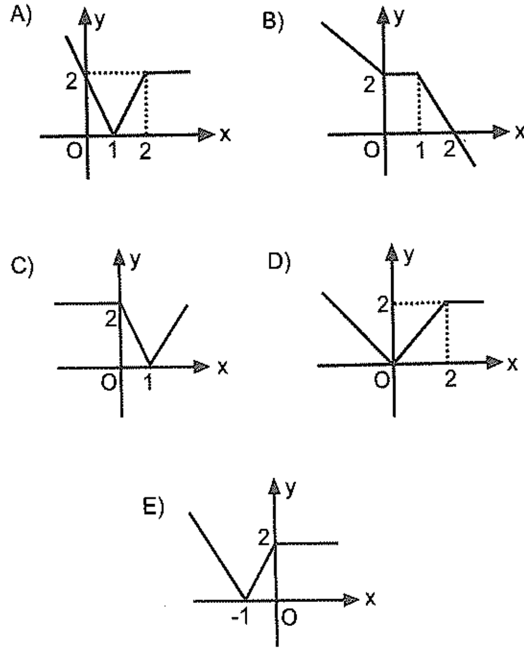
4. $y=|x+1|-|x-1|$

fonksiyonunun grafiği aşağıdakilerden hangisi olabilir?



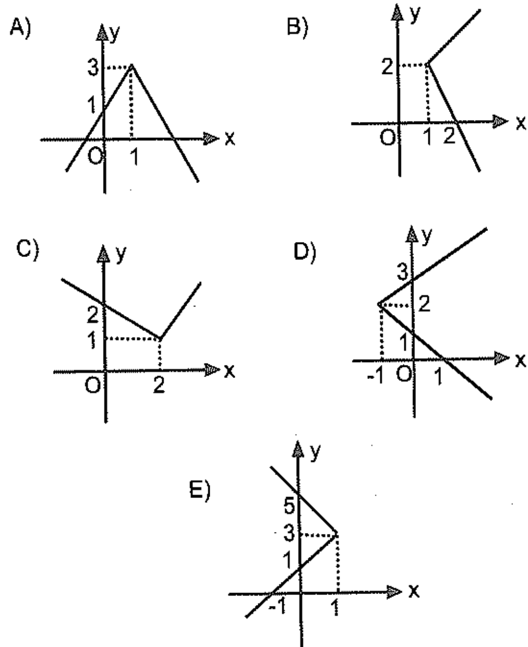
5. $y = |x - |x-2||$

fonksiyonunun grafiği aşağıdakilerden hangisi olabilir?



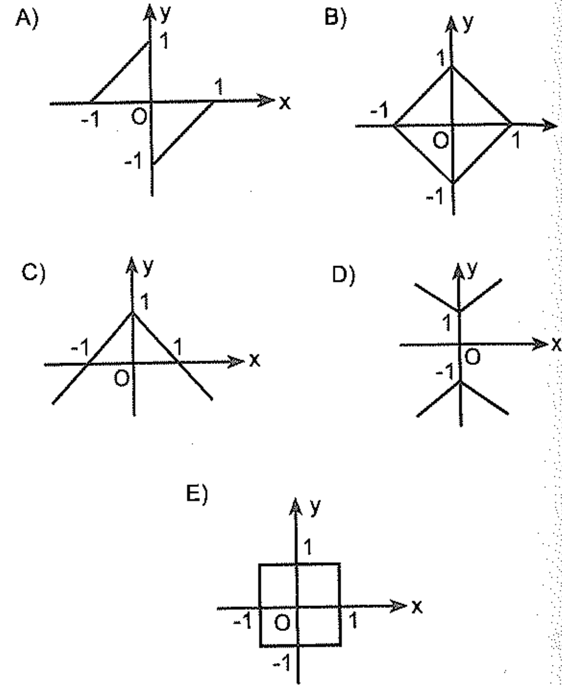
6. $|y-2| - x = 1$

bağıntısının grafiği aşağıdakilerden hangisi olabilir?



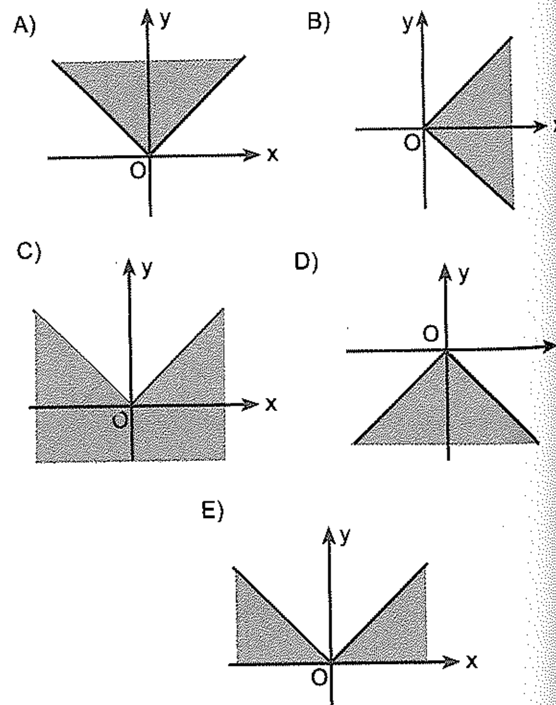
7. $|x| + |y| = 1$

bağıntısının grafiği aşağıdakilerden hangisi olabilir?



8. $y - |x| \geq 0$

bağıntısının grafiği aşağıdakilerden hangisi olabilir?



Hatırlayın. ☺
İki veya daha fazla mutlak değerin toplamı sıfır ise her biri tek tek sıfıra eşit idi.

1. $|x-2| + |y-4| = 0$

olduğuna göre, x + y toplamı kaçtır?

2. $|x^3+1| + |y+3| + |z-4| = 0$

olduğuna göre, x + y + z toplamı kaçtır?

3. $|2x+10| + 3$

toplamının alabileceği en küçük değer kaçtır?

Örnek Soru

$f(x) = |2x+4| + |x-4|$

fonksiyonunun en küçük değeri kaçtır?

Çözelim☺
İki mutlak değerin toplamının en küçük değerini bulurken önce kritik noktaları (mutlak değerleri sıfır yapan değerleri) bulun. Sonra da bu değerleri fonksiyonda yerine yazın. Yani, bu soruda f(–2) ve f(4) ün kaça eşit olduğunu bulun. Hangisi küçük çıkarsa cevabınız odur.
f(–2) = 6 ve f(4) = 12 dir. Küçük olanı 6 olduğu için bu sorunun cevabı 6 dır.
Eğer üç tane mutlak değer olsaydı aynı şeyi üçü için de yaparsınız.
Anlaşıldı mı?

4. $|2x+10| + |x+2|$

toplamının alabileceği en küçük değer kaçtır?

5. $T = |x+2| + |2x-8|$

olduğuna göre, T nin alabileceği en küçük değer kaçtır?

6. $f(x) = |x+1| + |x-4| + |2x+4|$

fonksiyonunun görüntü kümesinin en küçük elemanı kaçtır?

7. $A = |2x+2| + |2x-4| + |x+3|$

olduğuna göre, A nın alabileceği en küçük değer kaçtır?

8. $|2x+4|+|x-3|+M$

toplamının alabileceği en küçük değer 4 olduğuna göre, M kaçtır?

9. $\dfrac{24}{|x+1|+|2x-6|}$

ifadesinin alabileceği en büyük değer kaçtır?

Örnek Soru

$A=|x+2|-|x-4|$

olduğuna göre, A nın alabileceği en büyük ve en küçük değer kaçtır?

Çözelim☺
Bu soruda A nın en büyük değeri x = 4 için aldığı değerdir. Yani, $A_{max}=|x+2|-\underbrace{|x-4|}_{0\ \text{olmalı}}$ dolayısıyla da x = 4 için A nın en büyük değeri 6 oluyor.

A nın en küçük değeri için ise x = – 2 vermek lâzım.
$A_{min}=\underbrace{|x+2|}_{0\ \text{olmalı}}-|x-4|$ bu da x = – 2 için – 6 dır.
Bu sorudan şu sonucu da çıkarabilirsiniz☺
A nın değer aralığı (yani, görüntü kümesi) $-6 \le A \le 6$ dır.

10. $A=|x+5|-|x-1|$

olduğuna göre, A nın alabileceği en büyük değer kaçtır?

11. $K=|x+4|-|x-3|$

olduğuna göre, K nın alabileceği en küçük değer kaçtır?

12. $A=|x+2|-|x-3|$

olduğuna göre, A kaç farklı tam sayı değer alabilir?

13. R de tanımlı,

$f(x)=|3x-12|+|2x-10|$

fonksiyonunun görüntü kümesi nedir?

14. R de tanımlı,

$f(x)=|x+2|-|x-4|$

fonksiyonunun görüntü kümesi nedir?

Fonksiyonların Tanım Kümesi

En geniş tanım kümesi olayı önemli.
Bir fonksiyonun en geniş tanım kümesinden kasıt x e verilebilecek değerlerin kümesidir. Yani, x e hangi değerleri verebiliriz. Ya da hangilerini veremeyiz. Önemli kısımlarını vereyim☺

- **Polinom fonksiyonların tanım kümesi**

$f(x)=3x^2-2x+5$

$g(x)=2x^4-3x^3+5x+1$

$h(x)=-5x^3+x+4$

gibi polinom tipi fonksiyonları tanımsız yapan x değeri yoktur. Onun için bu tip fonksiyonların en geniş tanım kümesi reel sayılardır. Yani, R dir.

- **Rasyonel fonksiyonların en geniş tanım kümesi**

Hatırlayın.
Rasyonel ifadeler paydalarını sıfır yapan x değerleri için tanımsız idi. Yani, x e paydayı sıfır yapan değerler verilemezdi.

Dolayısıyla bir rasyonel fonksiyonun en geniş tanım kümesi reel sayılardan paydayı sıfır yapan değerler çıkarılarak bulunur.

Örnek Soru

$f(x)=\dfrac{x+1}{x^2+x-6}+\dfrac{x^2}{x-5}$

fonksiyonu x in hangi değerleri için tanımsızdır?

Çözelim☺
Çok basit. Paydayı sıfır yapan değerler için.
Yani, bu fonksiyon $x^2+x-6=0$ dan x = 2 ve x = – 3 için. Bir de x – 5 = 0 dan x = 5 için tanımsızdır.
Öyle değil mi? Meselâ f(5) kaçtır? Veya f(2) kaçtır? diye bir şey sorabilir miyim?
Tabii ki hayır.
Peki bu fonksiyonun en geniş tanım kümesi nedir?
Onu da yazayım. Reel sayılardan tanımsız yapan değerleri çıkaracaksınız. Bu da R – {– 3, 2, 5} şeklinde ifade edilir.

Siz de $f(x)=\dfrac{3x+1}{x^2-x-12}+\dfrac{1}{x+2}$ fonksiyonunun en geniş tanım kümesini bulun bakalım.
R – {– 3 ,– 2, 4} bulduysanız aferin☺.

- **Köklü Fonksiyonların En Geniş Tanım kümesi:**

Köklü fonksiyonlarda
Kök derecesi tek ise kök yokmuş gibi düşünebilirsiniz. Yani, kökten dolayı tanımsızlık olmaz.
Fakaaat...
Kök derecesi çift ise fonksiyon **kök içi ≥ 0** şartını sağlayan x değerleri için tanımlıdır. Veya kök içini negatif yapan x değerlerinde tanımsızdır.

Örnek Soru

$f(x)=\sqrt{5-|2x-1|}$

fonksiyonunun en geniş tanım kümesi nedir?

Çözelim☺
Kök derecesi çift olduğu için kök içi ≥ 0 olması lâzım. Yani, $5-|2x-1|\ge 0$ olmalı. Artık bunu çözüp en geniş tanım kümesini (aralığını) [– 2, 3] olarak bulursunuz.

Örnek Soru

$f(x)=\sqrt{x-2}+\sqrt{6-x}+\sqrt[3]{2x-8}$

fonksiyonu x in kaç farklı tam sayı değeri için tanımlıdır?

Çözelim☺
Tek tek değer vererek bakmıycaz tabii ki.
Az önce ne dedik?
Kök derecesi çift ise kök içi ≥ 0 olması lâzımdı.
Dolayısıyla x – 2 ≥ 0 dan x ≥ 2 ve 6 – x ≥ 0 dan x ≤ 6 olmalı. $\sqrt[3]{2x-8}$ ifadesi ise daima tanımlıdır.
Çünkü kök derecesi tek. Demek ki 2 den 6 ya kadar olan yani, [2, 6] aralığındaki tam sayılar için tanımlı.
Yani, beş tam sayı için.

- **Logaritmik fonksiyonun en geniş tanım kümesi**

Bu son. Bunu da verip bitireyim.
$f(x)=\log_{g(x)}h(x)$ biçimindeki bir fonksiyonun en geniş tanım kümesi g(x) > 0, g(x) ≠ 1 ve h(x) > 0 eşitsizlik sisteminin çözüm kümesidir.
Yazarken biraz gıcık gibi duruyor. Ama o kesinlikle çok kolay.☺
Özet olarak hepsi pozitif olacak ve taban 1 e eşit olmayacak.
Zor mu ki?
Geçtim.....

1. $f(x)=\frac{3x+1}{x-2}+\frac{1}{x-3}$

fonksiyonunu tanımsız yapan x değerlerinin toplamı kaçtır?

2. $f(x)=\frac{3x+1}{x^2-1}+\frac{1}{x^2-2x}-\frac{1}{x}$

fonksiyonunu x in kaç farklı değeri için tanımsızdır?

3. $f(x)=\frac{x+1}{x^3-4x}$

fonksiyonunu x in kaç farklı değeri için tanımsızdır?

4. $f(x)=\frac{x+1}{x^2-2x-8}$

fonksiyonunu tanımsız yapan x değerlerinin toplamı kaçtır?

5. $f(x)=\frac{x^2-x+1}{|x-5|-2}$

fonksiyonunu tanımsız yapan x değerlerinin toplamı kaçtır?

6. $f(x)=\frac{x^2+3}{|2x-1|-9}$

fonksiyonunu tanımsız yapan x değerlerinin toplamı kaçtır?

7. $f(x)=\frac{2}{|x-5|-|x+1|}$

fonksiyonunu tanımsız yapan x değerlerinin toplamı kaçtır?

8. $f(x)=\frac{5}{x^2-(m-1)x-3}$

fonksiyonunu tanımsız yapan x değerlerinin toplamı 2 olduğuna göre m kaçtır?

1. $f(x)=3+\sqrt{-x+2}$

fonksiyonunun en geniş tanım aralığı nedir?

2. $f(x)=2x+\sqrt{5-x}$

fonksiyonunun en geniş tanım aralığı nedir?

3. $f(x)=\sqrt{x-2}-\sqrt{6-x}$

fonksiyonunun en geniş tanım aralığı nedir?

4. $f(x)=\sqrt{-x^2+2x+3}$

fonksiyonunun en geniş tanım aralığı nedir?

5. $f(x)=\sqrt{\frac{x-1}{6-x}}$

fonksiyonunun en geniş tanım aralığı nedir?

6. $f(x)=\sqrt{4-x^2}+\sqrt[3]{2x-10}$

fonksiyonunun en geniş tanım aralığı nedir?

7. $f(x)=3\sqrt{1-x^2}+\sqrt[3]{x+2}+3$

fonksiyonunun en geniş tanım aralığı nedir?

8. $f(x)=\sqrt{5-|x-1|}$

fonksiyonunun en geniş tanım aralığı nedir?

9. $f(x)=\sqrt{9-|5x-1|}$

fonksiyonunu x in kaç farklı tam sayı değeri için tanımlıdır?

10. $f(x)=\sqrt{|x+1|-4}$

fonksiyonu x in kaç farklı tam sayı değeri için tanımsızdır?

11. $f(x)=\sqrt{25-x^2}+\sqrt[3]{x-2}-\sqrt{x+2}$

fonksiyonunu tanımlı yapan x tam sayılarının toplamı kaçtır?

12. $f(x)=\sqrt{1+\frac{5}{x-5}}$

fonksiyonunu tanımsız yapan tam sayıların toplamı kaçtır?

13. $f(x)=\sqrt{\frac{1-x}{x^2-5x-6}}$

fonksiyonunun en geniş tanım aralığı nedir?

14. $f(x)=3\sqrt{1-x^2}$

fonksiyonunun en geniş tanım kümesi T, görüntü kümesi G olduğuna göre, $T \cap G$ kümesi nedir?

15. $f(x)=2\sqrt{1-x^2}$

fonksiyonunun en geniş tanım kümesi T, görüntü kümesi G olduğuna göre, $T \cup G$ kümesi nedir?

16. $f(x)=2+\sqrt{9-x^2}$

fonksiyonunun en geniş tanım kümesi T, görüntü kümesi G olduğuna göre, T U G kümesi nedir?

1. $f(x)=\frac{\sqrt[3]{x+1}}{x-2}$

fonksiyonunun en geniş tanım aralığı nedir?

2. $f(x)=\sqrt{2x-6}+\frac{1}{x^2+1}$

fonksiyonunun tanım kümesindeki en küçük x değeri için $\sqrt{x+7}$ ifadesinin değeri kaçtır?

3. $f(x)=\frac{x^3+x+1}{\sqrt{x-1}-2}$

fonksiyonunu x in hangi pozitif tam sayı değeri için tanımsızdır?

4. $f(x)=\frac{5x-3}{2x-m}+\frac{x^2}{x+2}$

fonksiyonunu tanımsız yapan x değerleri toplamı 3 olduğuna göre, m kaçtır?

5. $f(x)=\log_5(2x-8)$

fonksiyonunu tanımlı olduğu en küçük tam sayı kaçtır?

6. $f(x)=\log_3(5-x)$

fonksiyonunu tanımlı yapan pozitif tam sayıların toplamı kaçtır?

7. $f(x)=\log_2(x-3)$

fonksiyonunun ten geniş tanım kümesi nedir?

8. $f(x)=\log_2\left(-x^2+2x+8\right)$

fonksiyonunun en geniş tanım aralığı nedir?

9. $f(x)=\log_2\left(\frac{6-x}{x-1}\right)$

fonksiyonunun en geniş tanım aralığı nedir?

10. $f(x)=\log_2\left(\frac{x^2-x-20}{1-x}\right)$

fonksiyonunu tanımlı yapan pozitif x tam sayılarının toplamı kaçtır?

11. $f(x)=\log_2(2x^2-50)$

fonksiyonunu tanımsız yapan pozitif tam sayıların toplamı kaçtır?

12. $f(x)=\log_2(x^2-2x-15)$

fonksiyonu x in kaç farklı tam sayı değeri için tanımsızdır?

13. $f(x)=\log_2(3-|x-1|)$

fonksiyonu x in kaç farklı tam sayı değeri için tanımlıdır?

14. $f(x)=\log_{(x-1)}(7-x)$

fonksiyonunun en geniş tanım kümesindeki tam sayıların toplamı kaçtır?

15. $f(x)=\log_x(4x-x^2)$

fonksiyonunun en geniş tanım aralığı nedir?

16. $f(x)=\log_{\sqrt{x}}(7-2x)$

fonksiyonu x in kaç tam sayı değeri için tanımlıdır?

Limit ve Süreklilik

Bir milletin büyüklüğü, nüfusunun çokluğu ile değil, akıllı ve fazilet sahibi adamlarının sayısı ile belli olur.
Victor Hugo

Yetenekler ortaktır; herkes onlara sahiptir ama nadir olan yeteneklerimizin bizi götürdüğü yere gitme cesaretidir.

LİMİT ve SÜREKLİLİK

Limit konusu kolay sayılabilecek bir konu.
Size önce bilimsel bir tanım☺
x değişkeni a sayısına yaklaştığında f fonksiyonu da b sayısına yaklaşıyorsa, b sayısına; x, a ya yaklaşırken **f fonksiyonunun limiti** denir.

Ve $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$ şeklinde gösterilir.

Bir şey anladınız mı?
Neyse... Birazdan ne demek istediğimi daha iyi anlayacaksınız. Gerçi bu konuyu anlatarak öğretmek daha kolay. Ama üzgünüm ki burada yazarak izah etmek zorundayım☹

Ayrıca burada bir de **sağdan limit** ve **soldan limit** muhabbeti var. Limit olayının iyi anlaşılabilmesi için ilk önce bu sağ sol olayını halletmek lâzım.☺ Dolayısıyla da ilk önce sağdan ve soldan limitin ne olduğunu iyice bi öğrenin bakalım.

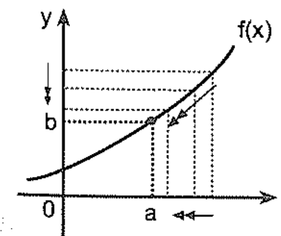
Fonksiyonun grafiğinden yararlanarak limit bulma ve sağdan –soldan limit olayı

Sağdan Limit

x değişkeni a ya sağdan (yani, a dan büyük ve azalan değerlerle) yaklaşırken f nin limiti varsa (her hangi bir değere yaklaşıyorsa) bu limit değerine f nin x = a noktasındaki **sağdan limiti** denir.

$\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = \ldots$ şeklinde gösterilir.

Yalnız bu yazımda şuna dikkat edin. **Buradaki a nın üstündeki artı x in a dan birazcık daha büyük olduğu anlamına gelir. Bunun a nın pozitif olmasıyla bir ilgisi yoktur.** Bilginiz olsun.



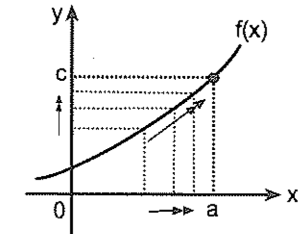
Şekildeki f(x) fonksiyonun da $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = b$ dir.

Soldan Limit

x değişkeni a ya soldan (yani, a dan küçük ve artan değerlerle) yaklaşırken f(x) in limiti varsa (yani, yaklaştığı bir değer varsa) bu limit değerine f(x) in x = a noktasındaki **soldan limiti** denir.

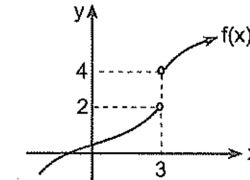
$\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = \ldots$ şeklinde gösterilir.

Ve burada da **a nın üssündeki eksi x in a dan birazcık küçük bir değer olduğu anlamına gelir. Yoksa a nın negatif olmasıyla ilgisi yoktur.** Ona göre.



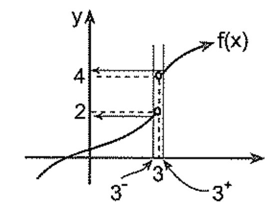
Şekildeki f(x) fonksiyonun da $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = c$ dir.

Sağdan ve soldan limit olayını bir de şöyle izah edeyim. Ama önce güzel bir şekil çizeyim.



Şimdi diyelim ki yukarıdaki fonksiyonun x = 3 noktasında sağdan limiti ve soldan limitini, yani $\lim\limits_{x \to 3^+} f(x)$ ve $\lim\limits_{x \to 3^-} f(x)$ değerlerini bulmak istiyorsunuz.

Yapmanız gereken şey şu: $\lim\limits_{x \to 3^+} f(x)$ değerini bulmak için 3 ün sağından (Ama hemen dibinden☺) yukarıya doğru (Aşağıya doğru da olabilir.) düz bir çizgi çizin ve ilk önce bu çizginin eğriyi kestiği noktayı bulun. Sonra bakın bakalım bu noktaya karşılık gelen y değeri yaklaşık olarak kaç?

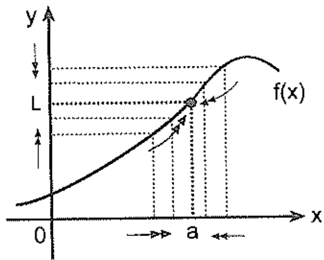


İşte 3 noktasındaki sağdan limit budur. Yukarıdaki fonksiyonda bu değerin $\lim\limits_{x \to 3^+} f(x) = 4$ olduğunu bulmuşsunuzdur artık☺
Aynı mantıkla soldan limiti bulurken aynı işlemi 3 ün hemencecik solundan bir çizgi çizerek bulun bakalım.

2 yi buldunuz mu? Çok yahşi.☺

Ve gelelim can alıcı noktaya;
Bir fonksiyonun herhangi bir noktada limitinin olması için bu noktada sağdan ve soldan limit değerinin birbirine eşit olması gerekir. Dolayısıyla bir fonksiyonun herhangi bir noktada sağdan ve soldan limiti eşit değilse bu noktada limiti yoktur.

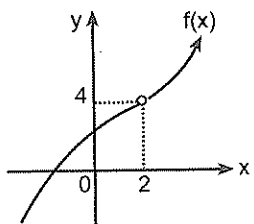
Aslında bu dediklerimi şöyle özetleyebilirim. **Fonksiyonun grafiğinde sıçrama olan noktalarda limit yoktur.** Meselâ az önceki fonksiyonun x = 3 noktasındaki sağdan ve soldan limitleri farklı olduğu için bu noktada limiti yoktur. Zaten sıçrama yaptığı da çok net görünüyor. Öyle değil mi?
Meselâ şu grafikte x = a da eğride sıçrama olmadığı için bu noktada limit vardır.



Şekildeki f fonksiyonunda

$\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \lim\limits_{x\to a^-} f(x) = L$ olduğundan $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$

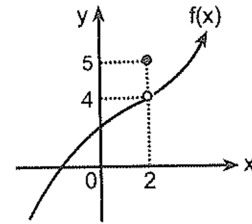
dir.
Ayrıca, bir fonksiyonun herhangi bir noktada limitinin olması için bu noktada tanımlı olması gerekmez.
Yani, bir fonksiyon limiti olduğu noktada tanımlı olmayabilir veya tanımlı olduğu değer limit değerinden daha farklı bir değer de olabilir. Hiç önemli değil.☺



Şekildeki f fonksiyonu x = 2 noktasında tanımlı değildir. Yani, f(2) değeri yoktur. Ama bu noktada limiti vardır. Çünkü fonksiyonun x = 2 noktasındaki limiti, bu noktada aldığı değer (tanımlı olduğu değer) değil, x in 2 ye sağdan ve soldan yaklaşırken f nin yaklaştığı değerdir. f fonksiyonu sağdan ve soldan 4 e yaklaştığından x = 2 noktasındaki limiti 4 tür.

Yani, $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = 4$ tür.

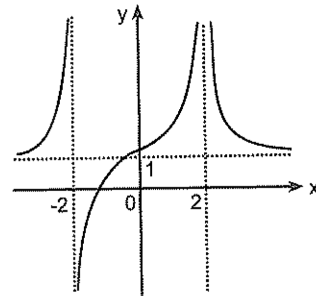
Herhangi bir noktada fonksiyonun limiti ile tanımlı olduğu değerin farklı olması limit değerini etkilemez.



Örneğin, şekildeki f(x) fonksiyonu için f(2) = 5 tir.
Ama bu noktadaki limit $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = 4$ tür.

Grafikte limitin ∞ olması ve x → ∞ için limit hesabı

Bilimselliği yok ama şu bahsettiğim sayının sağından ve solundan çizgi çizerek limit bulma yöntemi bunda da işe yarıyor. Deneyin isterseniz☺



Dediklerimi yapın ve şekildeki f fonksiyonunun grafiğine göre,

$\lim\limits_{x\to -2^-} f(x) = \infty \quad \lim\limits_{x\to -2^+} f(x) = -\infty$

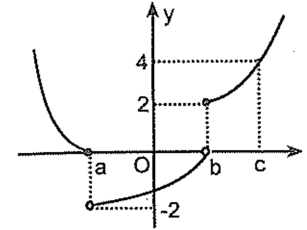
$\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \infty$

Demek ki, x = – 2 de limit yoktur. Çünkü sağdan ve soldan limiti farklı çıktı.
Ama x = 2 de limit ∞ dur. Çünkü ikisi de ∞ çıktı.
Bir de x → ∞ için limiti bulun bakalım. Yani,
$\lim\limits_{x\to \infty} f(x)$ değerini.

$\lim\limits_{x\to \infty} f(x) = \lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = 1$ olduğunu görebildiniz mi?

Grafiği verilen fonksiyonun herhangi bir noktadaki sağdan ve soldan limit olayı

1.



Şekilde grafiği verilen f fonksiyonuna göre,

a) $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) =$

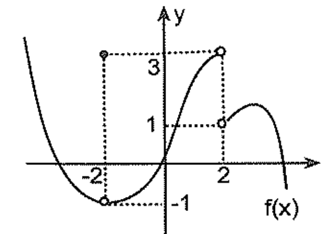
b) $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) =$

c) $\lim\limits_{x\to b^-} f(x) =$

d) $\lim\limits_{x\to b^+} f(x) =$

e) $\lim\limits_{x\to c} f(x) =$

2.

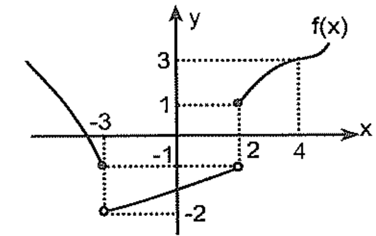


Şekilde grafiği verilen f fonksiyonuna göre,

a) $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) + \lim\limits_{x\to 2^+} f(x) =$

b) $\lim\limits_{x\to -2} f(x) =$

3.

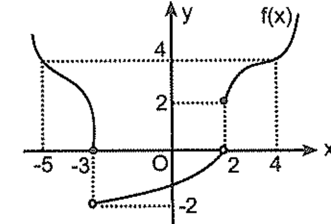


Şekilde grafiği verilen f fonksiyonuna göre,

a) $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) + \lim\limits_{x\to -3^+} =$

b) $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) + \lim\limits_{x\to 4} =$

4.



Şekilde grafiği verilen f fonksiyonuna göre,

a) $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) =$

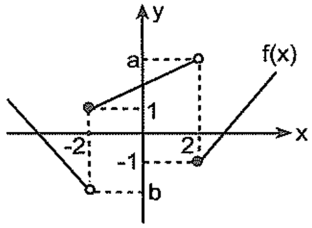
b) $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) =$

c) $\lim\limits_{x\to -3^-} f(x) =$

d) $\lim\limits_{x\to -3^+} f(x) =$

e) $\lim\limits_{x\to 4} f(x) =$

5.

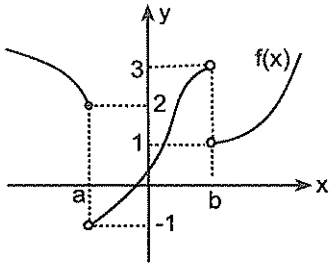


Şekilde grafiği verilen f fonksiyonuna göre,

a) $\lim\limits_{x\to -2^-} f(x) + \lim\limits_{x\to -2^+} = -3$ **olduğuna göre, b kaçtır?**

b) $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) + \lim\limits_{x\to -2^+} = 5$ **olduğuna göre, a kaçtır?**

6.

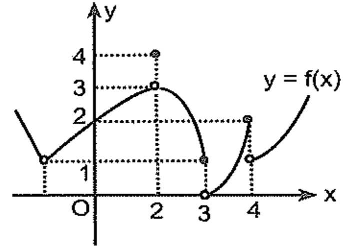


Şekilde grafiği verilen f fonksiyonuna göre,

a) $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) + \lim\limits_{x\to b^+} f(x) =$

b) $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) \cdot \lim\limits_{x\to b^-} f(x) =$

7.



Şekilde grafiği verilen f fonksiyonuna göre,

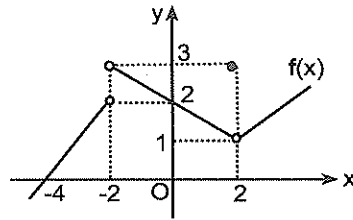
a) $\lim\limits_{x\to 0} f(x) + \lim\limits_{x\to 4^+} f(x) =$

b) $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x) \cdot \lim\limits_{x\to 2} f(x) =$

c) $f(2) + \lim\limits_{x\to 4^-} f(x) =$

d) $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) + \lim\limits_{x\to 3^-} f(x) =$

8.



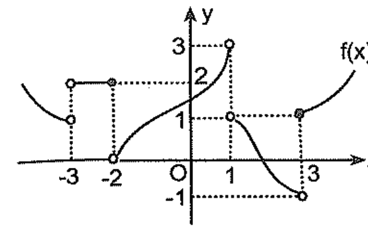
Şekilde grafiği verilen f fonksiyonuna göre,

a) $\lim\limits_{x\to -4} f(x) + \lim\limits_{x\to 2} f(x) =$

b) $\lim\limits_{x\to -2^+} f(x) \cdot \lim\limits_{x\to 0} f(x) =$

c) $\dfrac{f(0) + f(2)}{\lim\limits_{x\to 2} f(x)} =$

1.



Şekilde grafiği verilen f fonksiyonuna göre,

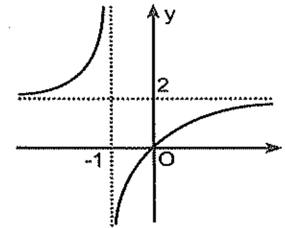
a) $\lim\limits_{x\to -2^-} f(x) + \lim\limits_{x\to 3^+} f(x) =$

b) $\lim\limits_{x\to -3^+} f(x) - \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) =$

c) $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) + \lim\limits_{x\to 3^-} f(x) =$

d) $\lim\limits_{x\to -2^+} f(x) \cdot \lim\limits_{x\to -3^+} f(x) =$

2.



Şekilde grafiği verilen f fonksiyonuna göre,

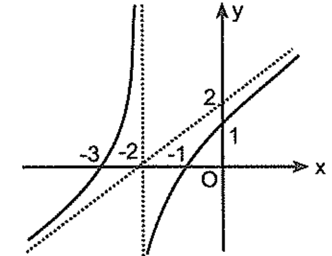
a) $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x) =$

b) $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x) =$

c) $\lim\limits_{x\to \infty} f(x) =$

d) $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) =$

3.



Şekilde grafiği verilen f fonksiyonuna göre,

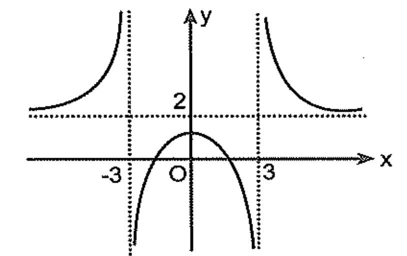
a) $\lim\limits_{x\to -2^+} f(x) =$

b) $\lim\limits_{x\to -2^-} f(x) =$

c) $\lim\limits_{x\to \infty} f(x) =$

d) $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) =$

4.



Şekilde grafiği verilen f fonksiyonuna göre,

a) $\lim\limits_{x\to -3^+} f(x) =$

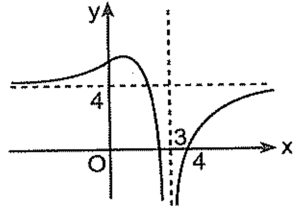
b) $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x) =$

c) $\lim\limits_{x\to \infty} f(x) =$

d) $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) =$

e) $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x) =$

5.



Şekilde grafiği verilen f fonksiyonuna göre,

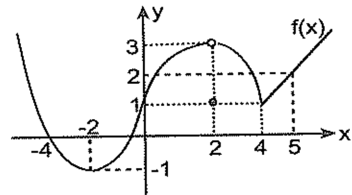
a) $\lim\limits_{x \to 3^+} f(x) =$

b) $\lim\limits_{x \to 3} f(x) =$

c) $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) =$

d) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) =$

6.



Şekilde grafiği verilen f fonksiyonuna göre,

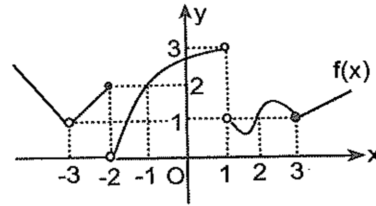
a) $\lim\limits_{x \to -2} f(x) =$

b) $\lim\limits_{x \to -4} f(x) + \lim\limits_{x \to 5} f(x) =$

c) $\lim\limits_{x \to 0} f(x) - \lim\limits_{x \to 2} f(x) =$

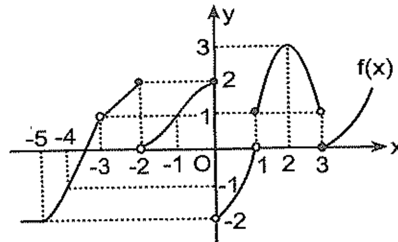
d) $f(2) + \lim\limits_{x \to 2} f(x) =$

7.



Şekilde grafiği verilen f fonksiyonunun apsisi – 3, – 2, – 1, 0, 1, 2, 3 olan noktaların hangilerinde limiti yoktur?

8.



Şekilde grafiği verilen f fonksiyonunun apsisi – 5, – 4, – 3, – 2, – 1, 0, 1, 2, 3 olan noktalarda var olan limitleri toplamı kaçtır?

Polinom ve Mutlak Değer Fonksiyonlarının Limiti

Grafik olmayan limit sorularında yapmanız gereken şey çok daha basit. Soru ne olursa olsun. Yapılması gereken ilk şey x i yerine yazmak. Eğer sıkıntı çıkarsa (ki bazılarında çıkacak☺) onu da nasıl halledeceğinizi sonra söyliycem.
Demek istediğim şu; f(x) bir polinom fonksiyon ise,
$\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$ dır. Yani, fonksiyonda x yerlerine a yazılır.
Ayrıca, x = a da limiti olan f(x) fonksiyonu için,

$$\lim\limits_{x \to a} |f(x)| = |f(a)|$$

$$\lim\limits_{x \to a} \sqrt[2n+1]{f(x)} = \sqrt[2n+1]{f(a)} \text{ dır.}$$

Bir örnekçikle ne demek istediğimi daha iyi anlayacaksınız.

Örnek Soru

$$\lim\limits_{x \to 1} \left(\sqrt{x^3+3} - |x-4| + 5x\right)$$

limitinin değeri kaçtır?

Çözelim☺

Normalde sorular genelde bu kadar da uzun olmaz. Fakat ben soru uzun ve daha karmaşık olsa bile fark etmediğini görün diye böyle yazdım.
Az önce ne dedim? Soru nasıl olursa olsun. yapacağınız ilk iş verilen x değerini yerine yazmak. Problem çıkarsa onu sonra düşünürsünüz.
Yazın bakalım.

$$\lim\limits_{x \to 1} \left(\sqrt{x^3+3} - |x-4| + 5x\right) = \sqrt{1^3+3} - |1-4| + 5.1$$

Buradan da sonucu 4 bulursunuz artık.

1. $\lim\limits_{x \to 2} (5x-3)$

limitinin değeri kaçtır?

2. $\lim\limits_{x \to 3} \left(x\sqrt{2} - \sqrt{8}\right)$

limitinin değeri kaçtır?

3. $\lim\limits_{x \to 2} \left(x^2 - 5x + 1\right)$

limitinin değeri kaçtır?

4. $\lim\limits_{x \to -1} \left(x^3 - 4x + 2\right)$

limitinin değeri kaçtır?

5. $\lim\limits_{x \to 2} (3x + 2m + 5) = 17$

olduğuna göre, m kaçtır?

6. $\lim\limits_{x \to 3} \left(x^2 - ax\right) = 0$

olduğuna göre, a kaçtır?

7. $\lim_{x \to 3} f(x) = 2$ olmak üzere,

$\lim_{x \to 3} (4f(x) + 3m) = 11$

olduğuna göre, m kaçtır?

8. $\lim_{x \to 5} \sqrt{3x+1}$

limitinin değeri kaçtır?

9. $\lim_{x \to -1} |-3x+1|$

limitinin değeri kaçtır?

10. $\lim_{x \to -3} \left| \frac{-3x+1}{x+2} \right|$

limitinin değeri kaçtır?

11. $\lim_{x \to 1} \frac{mx-2}{x+1} = 3$

olduğuna göre, m kaçtır?

12. $\lim_{x \to 2} \frac{mx^2+3x+2}{x-1} = 4$

olduğuna göre, m kaçtır?

13. $\lim_{x \to -1} \sqrt{\frac{3x+4}{5-4x}}$

limitinin değeri kaçtır?

Normal bir soruda sağdan ve soldan limit sorulması bir şey değiştirmez. Aynı şeyi yapın. Sağı solu boş verin. x yerine yine verilen değeri yazın

14. $\lim_{x \to 2^+} (4x-2)$

limitinin değeri kaçtır?

1. $\lim_{x \to -1^-} (-2x^3+4)$

limitinin değeri kaçtır?

2. $\lim_{x \to \frac{1}{2}^+} (8x^2-2x-3)$

limitinin değeri kaçtır?

3. $\lim_{x \to 3^-} |3x-8|$

limitinin değeri kaçtır?

4. $\lim_{x \to -4} \sqrt{21-|2x+3|}$

limitinin değeri kaçtır?

5. $\lim_{x \to -1^-} \left(3-\sqrt[3]{2x^2-2x+4}\right)$

limitinin değeri kaçtır?

6. $\lim_{x \to 2^+} \left(\sqrt{x+7}-\sqrt{x-1}\right)$

limitinin değeri kaçtır?

7. $\lim_{x \to 3^-} \left(x^2+\sqrt{6-2x}\right)$

limitinin değeri kaçtır?

8. $\lim_{x \to n} \left(3^{x+1}-2\right) = 79$

olduğuna göre, n kaçtır?

9. $\lim_{x\to c}\left(2^{2x-1}-17\right)=15$

olduğuna göre, c kaçtır?

10. $\lim_{x\to 2}\left(a^{2x+1}-43\right)=200$

olduğuna göre, a kaçtır?

11. $\lim_{x\to c}\left(x^2-1\right)=4c-5$

olduğuna göre, c kaçtır?

12. $\lim_{x\to 2}\left(4^x+2^{x-1}-3\right)$

limitinin değeri kaçtır?

13. $\lim_{x\to 3}\left(x^2+\log_x(x+6)\right)$

limitinin değeri kaçtır?

14. $\lim_{x\to 5}\left(2x+\log_2(5x+7)\right)$

limitinin değeri kaçtır?

15. $\lim_{x\to 3}\left(\left|2^{x-2}-x\right|-3\right)$

limitinin değeri kaçtır?

16. $\lim_{x\to m}\left(|2x-7|-3\right)=4$

olduğuna göre, m nin pozitif değeri kaçtır?

Parçalı fonksiyonun limiti

Parçalı fonksiyonlarda limit hesaplanırken bakmanız gereken ilk şey verilen noktanın kritik nokta (yani, fonksiyonun parçalara ayrıldığı x değeri) olup olmadığıdır. Kritik nokta değilse önceki limit hesaplarından farkı yok. Verilen değere uygun olan parçayı kullanıp limiti hesaplayın. Amma verilen noktakritik nokta ise bu noktadaki sağdan ve soldan limite bakmanız lâzım.
Bir örnek Soruyla izah edeyim.

Örnek Soru

$$f(x)=\begin{cases}3x+1, & x\le 1 \text{ ise,}\\ 5-x^2, & 1<x\le 3 \text{ ise,}\\ 1-2x, & x>3 \text{ ise,}\end{cases}$$

olduğuna göre,

a) $\lim_{x\to -2} f(x)$ **limitinin değeri kaçtır?**

b) $\lim_{x\to 1^+} f(x)$ **limitinin değeri kaçtır?**

c) $\lim_{x\to 3} f(x)$ **limitinin değeri kaçtır?**

Çözeyim☺
Bu soruda anlatmak istediğim her şey var.
a şıkkına bakalım. Ama daha önce şuna bakın. Bu fonksiyonun kritik noktaları hangileri acaba? x = 1 ve x = 3 öyle değil mi?
İlk önce bu kritik nokta meselesini halledin.
Neyse... Gelelim soruya.
x = – 2 noktasındaki limiti sormuşum. – 2 kritik nokta olmadığından direkt x yerine – 2 yazcaz. Ama hangisinde?
En üsttekinde tabii ki. Çünkü x ≤ 1 için kullanılacak olan o.

$\lim_{x\to -2} f(x)=\lim_{x\to -2} 3x+1=3.(-2)+1=-5$ tir.

b şıkkına bakalım.
1 noktasındaki sağdan limiti sormuşum.
Peki, bunda hangi parçayı kullanacaz? x 1 den azıcık da olsa büyük. Ne kadar büyük olduğu önemli değil. Önemli olan büyük olması.1 den büyük x değerleri için kullanacağımız parça ortadaki olduğundan

$\lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^+}\left(5-x^2\right)=4$ tür.

Var mı bi problem?
Gelelim en önemli kısmına. Yani, c şıkkına.

x = 3 teki limiti sormuşum. Ama dikkat edin. Bu nokta kritik nokta. Ve unutmayın ki parçalı fonksiyonların kritik noktalarındaki limitleri hesaplanırken bu noktalardaki hem sağdan hem de soldan limitlerine bakılır. Bakalım.
Önce sağdan limiti bulalım.

$\lim_{x\to 3^+} f(x)=\lim_{x\to 3^+}(1-2x)=1-2.3=-5$

Bir de soldan limiti bulalım.

$\lim_{x\to 3^-} f(x)=\lim_{x\to 3^-}\left(5-x^2\right)=5-3^2=-4$

Hımm...
İkisi farklı çıktı. O halde bu fonksiyonun x = 3 apsisli noktada limiti yoktur. Öyle ya. Bu noktadaki sağdan ve soldan limiti eşit çıkmadı.
Anlaşıldı mı olay?

1. $f(x)=\begin{cases}2x-5 & , x\ge 3 \text{ ise,}\\ x^2+2 & , x<3 \text{ ise,}\end{cases}$

olduğuna göre,

a) $\lim_{x\to 3^+} f(x)$ **limitinin değeri kaçtır?**

b) $\lim_{x\to 3^-} f(x)$ **limitinin değeri kaçtır?**

c) $\lim_{x\to 4} f(x)$ **limitinin değeri kaçtır?**

d) $\lim_{x\to -1} f(x)$ **limitinin değeri kaçtır?**

2. $f(x)=\begin{cases}3x+1, & x>2 \text{ ise}\\ 5, & x=2 \text{ ise}\\ 7-x^2, & x<2 \text{ ise}\end{cases}$

olduğuna göre, $\lim_{x\to 2^+} f(x)+\lim_{x\to 2^-} f(x)$ **toplamı kaçtır?**

3. $f(x)=\begin{cases} 2x+5, & x<-1 \text{ ise,} \\ x^2-2x, & -1\le x\le 2 \text{ ise,} \\ x^2+2, & x>2 \text{ ise,} \end{cases}$

olduğuna göre,

a) $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x)$ **limitinin değeri kaçtır?**

b) $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x)$ **limitinin değeri kaçtır?**

c) $\lim\limits_{x\to -1} f(x)$ **limitinin değeri kaçtır?**

d) $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ **limitinin değeri kaçtır?**

4. $f(x)=\begin{cases} 3x+1, & x>1 \text{ ise} \\ x^2+3, & x\le 1 \text{ ise} \end{cases}$

olduğuna göre, f(x) fonksiyonunun x = 1 noktasında limiti kaçtır?

5. $f(x)=\begin{cases} x^3+a, & x>-2 \text{ ise} \\ -3x^2, & x\le -2 \text{ ise} \end{cases}$

olduğuna göre, f(x) fonksiyonunun x = – 2 noktasında limiti olması için a kaç olmalıdır?

6. $f(x)=\begin{cases} 4 & , x=2 \text{ ise,} \\ x^2+1 & , x\ne 2 \text{ ise,} \end{cases}$

olduğuna göre,

a) $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)$ **limitinin değeri kaçtır?**

b) $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)$ **limitinin değeri kaçtır?**

c) $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ **limitinin değeri kaçtır?**

d) $\lim\limits_{x\to -3} f(x)$ **limitinin değeri kaçtır?**

7. $f(x)=\begin{cases} ax-8, & x>2 \text{ ise} \\ 10-x^2, & x\le 2 \text{ ise} \end{cases}$

fonksiyonunun x = 2 noktasında limitinin olması için a kaç olmalıdır?

8. $f(x)=\begin{cases} 2x-1, & x>m \text{ ise} \\ x+4, & x\le m \text{ ise} \end{cases}$

fonksiyonunun x = m noktasında limiti olduğuna göre, m kaçtır?

1. $f(x)=\begin{cases} x-1 & , x\ge 3 \text{ ise,} \\ x^2 & , x<3 \text{ ise,} \end{cases}$

olduğuna göre,

a) $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x)$ **limitinin değeri kaçtır?**

b) $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)$ **limitinin değeri kaçtır?**

c) $\lim\limits_{x\to 4} f(x)$ **limitinin değeri kaçtır?**

d) $\lim\limits_{x\to -1} f(x)$ **limitinin değeri kaçtır?**

2. $f(x)=\begin{cases} x^2+1, & x<-1 \text{ ise,} \\ x+3, & -1\le x\le 2 \text{ ise,} \\ x^2+2, & x>2 \text{ ise,} \end{cases}$

olduğuna göre,

a) $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x)$ **limitinin değeri kaçtır?**

b) $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x)$ **limitinin değeri kaçtır?**

c) $\lim\limits_{x\to -1} f(x)$ **limitinin değeri kaçtır?**

d) $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ **limitinin değeri kaçtır?**

3. $f(x)=\begin{cases} 3 & , x=2 \text{ ise,} \\ 2x-5 & , x\ne 2 \text{ ise,} \end{cases}$

olduğuna göre,

a) $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)$ **limitinin değeri kaçtır?**

b) $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)$ **limitinin değeri kaçtır?**

c) $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ **limitinin değeri kaçtır?**

d) $\lim\limits_{x\to -3} f(x)$ **limitinin değeri kaçtır?**

4. $f(x)=\begin{cases} x+4, & x\le 0 \text{ ise,} \\ 4-x^2, & 0<x\le 2 \text{ ise,} \\ x^2+x-6, & x>2 \text{ ise,} \end{cases}$

olduğuna göre,

a) $\lim\limits_{x\to -4} f(x)$ **limitinin değeri kaçtır?**

b) $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x)$ **limitinin değeri kaçtır?**

c) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ **limitinin değeri kaçtır?**

d) $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ **limitinin değeri kaçtır?**

5. $f(x)=\begin{cases}4x-1, & x>2 \text{ ise}\\ 3, & x=2 \text{ ise}\\ 3-x^2, & x<2 \text{ ise}\end{cases}$

olduğuna göre, $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)+\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)$ **toplamı kaçtır?**

6. $f(x)=\begin{cases}2x-5, & x>1 \text{ ise}\\ x^3-1, & x\le 1 \text{ ise}\end{cases}$

olduğuna göre, f(x) fonksiyonunun x = 1 noktasında limiti kaçtır?

7. $f(x)=\begin{cases}2x+a, & x>-2 \text{ ise}\\ x^2, & x\le -2 \text{ ise}\end{cases}$

olduğuna göre, f(x) fonksiyonunun x = – 2 noktasında limiti olması için a kaç olmalıdır?

8. $f(x)=\begin{cases}ax+1, & x>2 \text{ ise}\\ x+7, & x\le 2 \text{ ise}\end{cases}$

fonksiyonunun x = 2 noktasında limitinin olması için a kaç olmalıdır?

9. $f(x)=\begin{cases}2x^2-x+3, & x\ne 1 \text{ ise,}\\ 5, & x=1 \text{ ise,}\end{cases}$

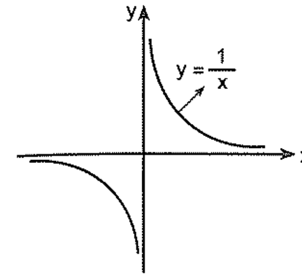
olduğuna göre, $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)+\lim\limits_{x\to -2} f(x)$ **toplamı kaçtır?**

10. $f(x)=\begin{cases}3x+4, & x>m \text{ ise}\\ 2x-1, & x\le m \text{ ise}\end{cases}$

fonksiyonunun x = m noktasında limiti olduğuna göre, m kaçtır?

Limiti ∞ olan ifadeler

Aşağıda $y=\frac{1}{x}$ eğrisinin grafiği üzerinde bir iki minik yorum yapalım ve bazı önemli neticelere ulaşalım. İlk önce grafiği çizeyim.



$\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1}{x}=\frac{1}{0^+}=\infty$

$\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{1}{x}=\frac{1}{0^-}=-\infty$

Buradan şu sonuca varabiliriz.

$\frac{2}{0^+}=\frac{3}{0^+}=\frac{\text{pozitif sayı}}{0^+}...=\infty$ dur.

Aynı mantıkla

$\frac{2}{0^-}=\frac{3}{0^-}=\frac{\text{pozitif sayı}}{0^-}...=-\infty$ dur.

Bu grafikte bir de şunu görün isterseniz.

$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}=\frac{1}{\infty}=0$

$\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=\frac{1}{-\infty}=0$

Yani, $\frac{\text{sayı}}{\infty}=0$ dır.

Örnek Soru

$\lim\limits_{x\to 3^+}\frac{2x-1}{x-3}$ **limitinin değeri nedir?**

Çözelim☺

x e kaç verecez? 3 mü? Yoksa...

İşte burada dikkatli olun. x e 3 verirseniz payda sıfır olur. Ve hiçbir şey bulamazsınız. Zaten soruda x e 3 ten azıcık büyük bir değer verin diyor☺.

Yani, $3^+ = 3{,}000....01$ gibi bir şey.☺

Bu durumda paydanın değeri

$x-3=3^+-3=(3{,}0....01)-3=0{,}00,,,01=0^+$ olur.

Pay için sıkıntı oluşturan bir şey yok. Direkt 3 yazabilirsiniz. Bu durumda limit değeri de

$\lim\limits_{x\to 3^+}\frac{2x-1}{x-3}=\frac{2.3-1}{0^+}=\frac{5}{0^+}=\infty$ olur.

Şunları da inceleyin. Eğer bir kesrin paydasını yazarken

$3^+-3=0^+$

$3^--3=0^-$

$2-2^+=0^-$

$2-2^-=0^+$ olarak düşünmek lâzım. (ki sıkıntı yaşamayasınız.)

Şimdi şu antrenmanları takır takır yaparsınız.

1. $\lim\limits_{x\to 2^+}\frac{3}{x-2}$

2. $\lim\limits_{x\to 3^+}\frac{2}{3-x}$

3. $\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{-2}{x-1}$

4. $\lim\limits_{x\to 3^+}\frac{2x+1}{x-3}$

5. $\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{x+3}{x-1}$

6. $\lim\limits_{x\to 2^+}\frac{4x}{2-x}$

7. $\lim\limits_{x\to -1^+}\frac{x+2}{x+1}$

8. $\lim\limits_{x\to 2^-}\frac{2x^2+1}{x-2}$

9. $\lim\limits_{x\to -2^-}\frac{x^2-1}{x+2}$

10. $\lim_{x \to 2^+} \frac{2x+8}{(x-2)^2}$

11. $\lim_{x \to 2^-} \frac{2x+8}{(x-2)^2}$

12. $\lim_{x \to 2} \frac{2x+8}{(x-2)^2}$

13. $\lim_{x \to 0^-} \left(5^{\frac{1}{x}} - 3^x + 5\right)$ **limitinin değeri kaçtır?**

14. $\lim_{x \to 0^+} \left(3.4^{\frac{-2}{x}} + 3^x + 1\right)$ **limitinin değeri kaçtır?**

15. $\lim_{x \to 0^+} \left(5^{\frac{-3}{x}} + 2^{x+1} + 4\right)$ **limitinin değeri kaçtır?**

16. $\lim_{x \to 1^-} \left(5^{\frac{1}{x-1}} + 4^x - 2\right)$ **limitinin değeri kaçtır?**

17. $\lim_{x \to 2^+} \left(3^{\frac{1}{2-x}} + 3\right)$ **limitinin değeri kaçtır?**

Bir polinom fonksiyonda $x \to \infty$ için limit hesaplanırken en büyük dereceli (en büyük üslü) terime bakmak yeterlidir. Gerisini sallamakta bir beis yok☺

Yani,

$$\lim_{x \to -\infty} x^n = \begin{cases} \infty & n \text{ çift ise,} \\ -\infty & n \text{ tek ise,} \end{cases}$$

$$\lim_{x \to \mp\infty} \left(a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0\right) = \lim_{x \to \mp\infty} a_n x_n \text{ dir.}$$

Örneğin,

$$\lim_{x \to -\infty} \left(-3x^4 + x^3\right) = \lim_{x \to -\infty} -3x^4 = -3(-\infty)^2 = -3.\infty = -\infty$$

Aynı şekilde

$$\lim_{x \to -\infty} \left(3x^5 - x^4 + 2\right) = \lim_{x \to -\infty} 3x^5 = 3(-\infty)^5 = -\infty$$

18. Aşağıdaki limit değerlerini bulunuz.

a) $\lim_{x \to \infty} \left(x^2 + x + 1\right)$

b) $\lim_{x \to \infty} \left(-4x^3 + 2\right)$

c) $\lim_{x \to -\infty} \left(x^2 + 3x + 1\right)$

d) $\lim_{x \to -\infty} \left(5x^9 - 2x - 3\right)$

e) $\lim_{x \to \infty} \left(-3x^2 + 4x + 1\right)$

f) $\lim_{x \to -\infty} \left(-4x^2 - x\right)$

g) $\lim_{x \to -\infty} \left(-3x^{99} + x^9 + x - 4\right)$

h) $\lim_{x \to -\infty} \left(-2x^{22} - 11x^7\right)$

Trigonometrik Fonksiyonların Limiti

Diğer limitlerden hiçbir farkı yok. Tek farkı içinde trigonometrik ifadeler var. O kadar.

Yalnız burada birazcık trigo ihtiyacınız olacak. En azından bazı özel açıların trigonometrik oranlarını ve biraz da yarım açı formüllerini bilmek lâzım.

Eee.. O kadar da olsun yani. Limit yapıyorsunuz.☺

Tabii ki mantık yine aynı. x gördüğünüz yere verilen değeri yazacaksınız. Ama dediğim gibi 30°, 45°, 60°, 90° veya bunların katları olan açıların trigonometrik oranlarını bilmek lâzım.

Demek istediğim şu

$\lim_{x \to \theta} \sin x = \sin\theta$

$\lim_{x \to \theta} \cos x = \cos\theta$ dır.

Örneğin, $\lim_{x \to \frac{\pi}{3}} \tan x = \tan\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$ tür.

Aynı şekilde $\lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \cos^2 x = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{1}{2}$

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{12}} \sin 4x + \cot 3x = \sin\frac{4\pi}{12} + \cot\frac{3\pi}{12} = \frac{\sqrt{3}}{2} + 1$$

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \left(\sin\frac{x}{2} + \cos 2x\right) = \sin\frac{\pi/2}{2} + \cos 2.\frac{\pi}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} - 1$$

olur.

1. $\lim_{x \to \frac{\pi}{3}} \left(1 + \sin^2 x\right)$

limitinin değeri kaçtır?

2. $\lim_{x \to \frac{\pi}{8}} \left(5 - \tan^2 2x\right)$

limitinin değeri kaçtır?

3. $\lim_{x \to \pi} (5\sin x - 2\cos x)$

limitinin değeri kaçtır?

4. $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x + \cos x}{2}$

limitinin değeri kaçtır?

5. $\lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{4\sin 2x}{1 + \tan x}$

limitinin değeri kaçtır?

6. $\lim_{x \to \pi} \frac{\cos 2x - \sin\frac{x}{2}}{1 + \cos\frac{x}{3}}$

limitinin değeri kaçtır?

7. $\lim_{x\to \frac{\pi}{4}} \frac{\sin x+1}{1+\cos x}$

limitinin değeri kaçtır?

8. $\lim_{x\to \frac{\pi}{6}} \left(\frac{\cos^2 x-\sin^2 x}{1+\sin x}\right)$

limitinin değeri kaçtır?

9. $\lim_{x\to \frac{\pi}{6}} \left(\frac{\cos x+\sin x}{\cos x-\sin x}\right)$

limitinin değeri kaçtır?

10. $\lim_{x\to \frac{\pi}{8}} \frac{1-2\sin^2 x}{2\sin x\cos x}$

limitinin değeri kaçtır?

11. $\lim_{x\to \frac{\pi}{12}} \sin x\cos x$

limitinin değeri kaçtır?

12. $\lim_{x\to \frac{\pi}{12}} (\tan x+\cot x)$

limitinin değeri kaçtır?

13. $\lim_{x\to \frac{3\pi}{2}} \frac{\cos 2x+\sin x}{1+\sin\frac{x}{3}}$

limitinin değeri kaçtır?

14. $\lim_{x\to \beta} \left(\frac{\cos^2 x-\sin^2 x}{\sin x\cos x}\right)=2\sqrt{3}$

olduğuna göre, β dar açısı kaç derecedir?

Belirsizlikler

$\frac{0}{0}$ belirsizliği

En önemlisi bu. Ama önce şu soruya bakın bi.

$\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x-1}$ limitinin değerini kaçtır?

Normal bir soru gibi çözmeye çalışalım. Yani x yerine verilen değeri yazalım bakalım.

x yerine 1 yazınca $\frac{0}{0}$ çıkıyor. Değil mi?

Yani, hem pay, hem de payda aynı anda sıfıra yaklaşıyor. İşte bu sorudaki gibi limiti değerini bulurken karşınıza $\frac{0}{0}$ belirsizliği çıkarsa x değerini belirsizliğe neden olan çarpanları sadeleştirin ve ondan sonra tekrar yerine yazın. Bunun için biraz çarpanlara ayırma biraz da başka şeyler bilmeniz lâzım.☺ Gerisi teferruat.☺ Meselâ üstteki soruda bu dediklerimi yaparsanız

$\lim_{x\to 1} \frac{\cancel{(x-1)}(x+1)}{\cancel{x-1}} = \lim_{x\to 1}(x+1)=1+1=2$ olur.

1. $\lim_{x\to 4} \frac{4x-16}{3x-12}$

limitinin değeri kaçtır?

2. $\lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x^2-2x}$

limitinin değeri kaçtır?

3. $\lim_{x\to -3} \frac{x^2+5x+6}{x^2+4x+3}$

limitinin değeri kaçtır?

4. $\lim_{x\to -2} \frac{x^3-4x}{x^2+3x+2}$

limitinin değeri kaçtır?

5. $\lim_{a\to 1} \frac{a^2-3a+2}{2a^2-2a}$

limitinin değeri nedir?

6. $\lim_{x\to 1} \frac{x^2+2x-3}{2x-2}=m+1$

olduğuna göre, m kaçtır?

7. $\lim_{x\to 1} \frac{x^3-1}{x^2-1}$

limitinin değeri kaçtır?

8. $\lim_{x\to -3} \frac{x^2-2x-15}{2x+6}$

limitinin değeri kaçtır?

9. $\lim_{x\to 4} \frac{2x-8}{\sqrt{x}-2}$

limitinin değeri kaçtır?

10. $\lim_{x\to 4} \frac{x^2-16}{\sqrt{x}-2}$

limitinin değeri kaçtır?

11. $\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x}-1}{x^2-1}$

limitinin değeri kaçtır?

12. $\lim_{h\to 0} \frac{(x+2h)^2-x^2}{h}$

limitinin değeri nedir?

13. $f(x) = x^2 + 2x$

olduğuna göre, $\lim_{x\to 2} \frac{f(x)-f(2)}{x^2-4}$ limiti kaçtır?

14. $f(x) = x^3 + 1$

olduğuna göre, $\lim_{x\to 3} \frac{f(x)-f(3)}{x^2-9}$ limiti kaçtır?

15. $f(x) = -x^2$

olduğuna göre, $\lim_{x\to 2} \frac{f(x+1)-f(3)}{x^2-4}$ limiti kaçtır?

1. $f(x) = x^2 - 2$

olduğuna göre, $\lim_{h\to 2} \frac{f(h+2)-f(4)}{h^2-4}$ limiti kaçtır?

2. $f(x) = x^2 + x$

olduğuna göre, $\lim_{h\to 0} \frac{f(h+1)-f(1)}{2h}$ limiti kaçtır?

$\frac{0}{0}$ belirsizliği olan trigonometrik ifadelerden oluşan kesirlerde belirsizliğe neden olan çarpan çoğu kez yarım açı formülleri kullanılarak sadeleştirilir.
cos2x ve sin2x in yarım açı formülünü hatırlıyor musunuz?

$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$
$= 2\cos^2 x - 1$
$= 1 - 2\sin^2 x$

$\sin 2x = 2.\sin x.\cos x$ idi.

3. $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos 2x}{\sin^2 x}$

limitinin değeri kaçtır?

4. $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x}{\cos x}$

limitinin değeri kaçtır?

5. $\lim_{x\to \frac{\pi}{4}} \frac{\tan x - \cot x}{\cos 2x}$

limitinin değeri kaçtır?

6. $\lim_{x\to \frac{\pi}{4}} \frac{\tan x - 1}{\sin x - \cos x}$

limitinin değeri kaçtır?

7. $\lim_{x\to \frac{\pi}{4}} \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{1-\tan x}$

limitinin değeri kaçtır?

8. $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 2x}{\sin^2 x - 1}$

limitinin değeri kaçtır?

9. $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 2x}{\cos x}$

limitinin değeri kaçtır?

10. $\lim_{x\to\pi} \frac{\cos 2x-1}{2\sin x}$

limitinin değeri kaçtır?

11. $\lim_{x\to 0} \frac{\cos 4x-1}{2\sin x\cos x}$

limitinin değeri kaçtır?

12. $\lim_{x\to\pi} \frac{1+\cos x}{\cos\frac{x}{2}}$

limitinin değeri kaçtır?

13. $\lim_{x\to 3} \frac{2x^2+mx}{x-3}$

limitinin sonucu bir reel sayı olduğu bilindiğine göre m kaçtır?

14. $\lim_{x\to 2} \frac{x^2+ax-6}{x-2}$

limitinin reel sayı olduğu bilindiğine göre a kaçtır?

15 **m ve n reel sayıları için**

$$\lim_{x\to -1} \frac{x^2+mx-3}{x^2-1}=n$$

olduğu bilindiğine göre, m kaçtır?

16. **m ve n reel sayılar olmak üzere,**

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2-mx+3}{x-1}=n$$

olduğuna göre, m + n toplamı kaçtır?

$\frac{0}{0}$ belirsizliğinin klasik bir tipi de şu.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin ax}{bx} = \lim_{x\to 0} \frac{\tan ax}{bx} = \frac{a}{b} \text{ dir.}$$

Hatta $\sin ax$ yerine $\tan ax$ ya da sadece ax veya bx yerine $\sin bx$ ya da $\tan bx$ yazılabilir. Sıkıntı olmaz.

Bu kısımda öyle özel türde sorular yok. Bir iki örnekçikle izah edeyim.

Örnek Soru

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin 5x+\tan 7x}{2x+\sin 2x}$$

limitinin değeri kaçtır?

Çözelim☺

Burada korsan çözüm yapayım☺

$x \to 0$ iken $\frac{0}{0}$ belirsizliği var ve kesrin payı ve paydası sin ve tan lardan oluşmuşsa sin ve tan ları silerek işlem yapın. Hem doğru çıkıyor. Hem de çok pırt. Demek istediğim şu

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin 5x+\tan 7x}{2x+\sin 2x} = \lim_{x\to 0} \frac{5x+7x}{2x+2x} = \frac{12}{4} = 3$$

Anladınız mı şimdi?

Peki, her zaman yer mi?

Walla. Ben yapıyom oluyo☺

Örnek Soru

$$\lim_{x\to 2} \frac{\sin(3x-6)+\tan(x-2)}{2x^2-8}$$

limitinin değeri kaçtır?

Çözelim☺

Fark etmiyor.

Bunda da $\frac{0}{0}$ belirsizliği var ve sin tanlar var sadece.

sin ve tan ı silip işlem yapalım bakalım bu da çıkacak mı?

$$\lim_{x\to 2} \frac{\sin(3x-6)+\tan(x-2)}{2x^2-8} = \lim_{x\to 2} \frac{3x-6+x-2}{2x^2-8}$$

bir sonraki adımı biliyorsunuz zaten.

$$\lim_{x\to 2} \frac{3x-6+x-2}{2x^2-8} = \lim_{x\to 2} \frac{4\cancel{(x-2)}}{2\cancel{(x-2)}(x+2)} = \frac{1}{2}$$

Bu da oldu. İsterseniz başka yollardan da çözüp görebilirsiniz. ☺ Biliyorsanız tabii ki☺

1. $\lim_{x\to 0} \frac{\sin 8x}{2x}$

limitinin değeri kaçtır?

2. $\lim_{x\to 0} \frac{\tan 12x}{\sin 3x}$

limitinin değeri kaçtır?

3. $\lim_{x\to 0} \frac{10x}{\sin 5x}$

limitinin değeri kaçtır?

4. $\lim_{x\to 0} \frac{6x}{\tan 3x}$

limitinin değeri kaçtır?

5. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sin\frac{6}{x}}{\frac{2}{x}}$

limitinin değeri kaçtır?

6. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sin\frac{10}{n}}{\frac{2}{n}}$

limitinin değeri kaçtır?

7. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{7x-\sin kx}{\tan x} = 4$

olduğuna göre, k kaçtır?

8. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan 5x+\sin 3x}{x+\sin x}$

limitinin değeri kaçtır?

9. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan 5x+\tan 7x}{x-\tan 2x}$

limitinin değeri kaçtır?

10. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin^2 cx}{2x^2} = 8$

olduğuna göre, c nin pozitif değeri kaçtır?

11. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{4x^2}{\sin x}$

limitinin değeri kaçtır?

Tabii cosları silmek yok☺

12. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 7x+x\cos 2x}{2x}$

limitinin değeri kaçtır?

1. $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\sin 6\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$

limitinin değeri kaçtır?

2. $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{4\sqrt{x}+\sin 2\sqrt{x}}{\tan\sqrt{x}}$

limitinin değeri kaçtır?

3. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{4x-4}{\sin(x-1)}$

limitinin değeri kaçtır?

4. $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{\sin(2x-8)}{x^2-16}$

limitinin değeri kaçtır?

5. $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{\sin(3x-12)}{2\tan(x-4)}$

limitinin değeri kaçtır?

6. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sin(x^2-1)}{x^4-1}$

limitinin değeri kaçtır?

7. $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^2+3x+2}{\sin(x+1)}$

limitinin değeri kaçtır?

8. $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{\tan(3x-9)}{x^2-5x+6}$

limitinin değeri kaçtır?

9. $\lim_{x \to 2} \frac{\tan(2x-4)+\tan(x-2)}{x^2-4}$

limitinin değeri kaçtır?

10. $\lim_{x \to \frac{1}{2}} \frac{\tan(2x-1)+\sin(10x-5)}{4x^2-1}$

limitinin değeri kaçtır?

11. $\lim_{x \to 0^+} \frac{\sqrt{\tan 4x}}{\sqrt{x}}$

limitinin değeri kaçtır?

12. $\lim_{x \to 0} \frac{1-\cos 2x}{x^2}$

limitinin değeri kaçtır?

13. $\lim_{x \to 0} \frac{1-\cos x}{2x^2}$

limitinin değeri kaçtır?

14. $\lim_{x \to 0} \frac{1-\cos 2x}{\tan^2 x}$

limitinin değeri kaçtır?

15. $\lim_{x \to 0^+} \frac{1-\cos 2\sqrt{x}}{x}$

limitinin değeri kaçtır?

16. $\lim_{x \to 0} \frac{x(1-\cos 2x)}{\tan^3 x}$

limitinin değeri kaçtır?

$\frac{\infty}{\infty}$ belirsizliği

Bu belirsizlikle daha çok pay ve paydanın polinom tipi olduğu rasyonel fonksiyonlarda karşılaşacaksınız.

$$\lim_{x \to \infty} \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \ldots b_0} = \lim_{x \to \infty} \frac{a_n x^n}{b_m x^m} \textbf{ dir.}$$

Eğer,
Payın derecesi paydanın derecesinden büyükse limit değeri $\pm\infty$,
Payın derecesi daha küçükse limit değeri 0 (sıfır),
Pay ve paydanın dereceleri eşit ise limit baş kat sayıların oranına eşit olur.

Derece Sırası

Sonsuza en hızlı hangisi gider?

Bu muhabbeti anlamak için mantığınızı devreye sokun. Aşağıda $x \to \infty$ için x li ifadeleri sonsuza gitme hızlarına göre sıraladım.

$\boxed{5^x > e^x} > \boxed{x^3 > x^2} > \log x > \sin x, \cos x, \text{sayı}$

$(\text{sayı})^x$ $\qquad x^{\text{sayı}}$

Bu ifadelerden herhangi ikisi ya da daha fazlası bir arada ise sonsuza hızlı gideni tespit edip diğerlerini sallayın. Sonsuza ilk kim giderse bayrağı sonsuza o diker.
Gerisi yolda telef olur. Onun için taa en başta sallayın gitsin.☺

Aslında sonsuzları karşılaştırmak doğru değil. Lakin burada anlatmak istediğim x değişkenine bağlı ifadelerin bazıları çok hızlı bir şekilde sonsuza koşar ve diğerlerini yutar! Kısaca işimiz hızlı koşanlarla. Gerisiyle işimiz olmaz.☺

Örnek Soru

$$\lim_{x \to \infty} \frac{6x^2+x+3}{2x^2-1}$$

limitinin değeri kaçtır?

Çözelim☺

$x \to \infty$ ve $\frac{\infty}{\infty}$ belirsizliği var. Böyle bir durumda ilk yapmanız gereken pay ve paydanın en büyük dereceli terimlerini belirleyip diğerlerini sallamak☺

Biz de onu yapalım.

Payın en büyük dereceli terimi $6x^2$, paydanınki ise $2x^2$ olduğundan bunları alıp kalan diğer terimleri atalım. Bu durumda limit

$$\lim_{x \to \infty} \frac{6x^2 \cancel{+x+3}}{2x^2 \cancel{-1}} = \lim_{x \to \infty} \frac{6x^2}{2x^2} = 3 \text{ olur.}$$

Anladınız mı?

$x \to \infty$ ve $\frac{\infty}{\infty}$ belirsizliklerinde mantık hep aynı aslında. Yeter ki en büyük dereceli terimleri belirlerken yamulmayın☺

1. $\lim_{x \to \infty} \frac{2x+5}{x-8}$

limitinin değeri kaçtır?

2. $\lim_{x \to \infty} \frac{4x^2+5x+1}{x^2+x+3}$

limitinin değeri kaçtır?

3. $\lim_{x \to \infty} \frac{6x^2+5x+1}{3x^2-10}$

limitinin değeri kaçtır?

4. $\lim_{x\to\infty} \frac{3\cdot 2^x+2}{2^x-1}$

limitinin değeri kaçtır?

5. $\lim_{x\to\infty} \frac{3\cdot 2^{x+2}+1}{2^{x-1}-3}$

limitinin değeri kaçtır?

Tabanı büyük olanın derecesi daha büyüktür!

6. $\lim_{x\to\infty} \frac{3\cdot 2^{x+5}+3^x}{3^{x-1}+2^{x+2}}$

limitinin değeri kaçtır?

7. $\lim_{x\to\infty} \frac{2\cdot 5^x+3^x+2}{5^x+3\cdot 4^x+1}$

limitinin değeri kaçtır?

8. $\lim_{x\to\infty} \frac{5\cdot 2^x+1}{7^x-10}$

limitinin değeri kaçtır?

9. $\lim_{x\to\infty} \frac{5x-1}{x^2+3}$

limitinin değeri kaçtır?

10. $\lim_{x\to\infty} \frac{7x+2}{x^3+3x+2}$

limitinin değeri kaçtır?

e^x in derecesi x^n nin derecesinden her zaman daha büyüktür.

11. $\lim_{x\to\infty} \frac{x^2+1}{e^x-1}$

limitinin değeri kaçtır?

1. $\lim_{x\to\infty} \frac{x^3+x+4}{5x^2+3x-2}$

limitinin değeri nedir?

2. $\lim_{x\to\infty} \frac{2^x+4}{x^2+3}$

limitinin değeri nedir?

3. $\lim_{x\to\infty} \frac{e^x-1}{x^5+2}$

limitinin değeri nedir?

4. $\lim_{x\to\infty} \frac{(2x+1)^2-5}{2x^2+x-1}$

limiti kaça eşittir?

5. $\lim_{x\to\infty} \frac{x(3x-1)^2}{x^3-x+2}$

limitinin değeri kaçtır?

6. $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1+3+5+\ldots+(2n-1)}{2n^2+1}\right)$

limitinin değeri kaçtır?

7. $\lim_{n\to\infty} \frac{(n+2)!+n(n+1)!}{(n+2)!}$

limiti kaça eşittir?

8. $\lim_{x\to\infty} \frac{ax^2+x+1}{(2a-3)x^2-3x+1}=2$

olduğuna göre, a kaçtır?

9. $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{3^{x+n} + 2^x}{3^{x-1} - 2^x} = 3^5$

olduğuna göre, n kaçtır?

10. $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{3 + 2^{x+1}}{5 - 2^{x+2}}$

limitinin değeri kaçtır?

11. $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{3^{x+2} - 2^{-x+3}}{3^{x-1} + 2^{-x+1}}$

limitinin değeri kaçtır?

12. $s_n = \dfrac{1}{n^2} \sum\limits_{k=1}^{n} (6k - 1)$

olduğuna göre, $\lim\limits_{n \to \infty} s_n$ **limitinin değeri kaçtır?**

13. $s_n = \dfrac{\sum\limits_{k=1}^{n} (4k+3)}{2n^2 + 1}$

olduğuna göre, $\lim\limits_{n \to \infty} s_n$ **limitinin değeri kaçtır?**

14. n reel sayı olmak üzere,

$\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{(m-2)x^2 + (m+1)x + 5}{(m-1)x + 1} = n$

olduğuna göre, m + n toplamı kaçtır?

15. $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{(m+1)x^2 - (5m-n)x + 1}{3x + 1} = 0$

olduğuna göre, n kaçtır?

16. $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x^{n-6} + 2}{x^{9-n} + 7} = 0$

olduğuna göre, n nin alabileceği doğal sayı değerlerinin toplamı kaçtır?

$x \to \pm\infty$ iken $\frac{\infty}{\infty}$ belirsizliğinde mutlak değer varsa dikkatli olun.
$x \to \infty$ ise mutlak değeri aynen, $x \to -\infty$ ise eksi açın. Tabii ki derece sırası önemini korumaya devam ediyor. Siz de dikkat etmeye devam edin.☺

1. $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{|3x| + |5x|}{|2x| - |x|}$

limitinin değeri kaçtır?

2. $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{|4x+1| + |2x-6|}{|x-1| + |x+2|}$

limitinin değeri kaçtır?

Kök derecesi çift ise mutlak değer olarak çıkıyordu. Ama tek ise mutlak değer filan yoktu.
Hatırlayın. $\sqrt{x^2} = |x|$ ve $\sqrt[3]{x^3} = x$ idi. ☺

3. $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{|5x| + \sqrt[3]{x^3}}{|3x| - \sqrt{4x^2}}$

limitinin değeri kaçtır?

4. $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{|x+5| + \sqrt[3]{(2x+1)^3}}{\sqrt{(x-2)^2} - \sqrt{(3x+1)^2}}$

limitinin değeri kaçtır?

5. $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{|2x+1| + \sqrt{9x^2 - 6x + 1}}{|x-1| - \sqrt{4x^2 + x + 3}}$

limitinin değeri kaçtır?

6. $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{|2x| + \sqrt{x^2}}{|3x-1| - \sqrt{4x^2}}$

limitinin değeri kaçtır?

7. $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{|2x+5| + \sqrt[3]{(x-3)^3}}{\sqrt{(3x-4)^2 + 1} - \sqrt{(x+2)^2}}$

limitinin değeri kaçtır?

8. $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{|x+2| + \sqrt{x^2 + 1}}{|2x-1| - \sqrt{x^2 + 1}}$

limitinin değeri kaçtır?

9. $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\sqrt{x^2-2x-1}+\sqrt[3]{8x^3+1}}{\sqrt{4x^2-x+2}-x}$

limitinin değeri kaçtır?

10. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x-\sin 4x}{x+1}$

limitinin değeri nedir?

11. $f(x)=x^2+x$

olduğuna göre, $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(2x)}{f(x)+x^2+3}$ **limitinin değeri kaçtır?**

12. $f(x)=3x+2$

olduğuna göre, $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(4x)-2x+1}{f(x)+2x-3}$ **limitinin değeri kaçtır?**

13. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{3x^2+2}{x^2+5}+a\right)=7$

olduğuna göre, a kaçtır?

14. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{x^2+2x+1}{x^3+5x-2}+m-1\right)=2$

olduğuna göre, m kaçtır?

15. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{4x^2+2}{x^2+x-5}+(a-2)x\right)=4$

olduğuna göre, a kaçtır?

16. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{-6x^2+2x}{2x^2-5}+(a-1)x+2\right)=b$

olduğuna göre, a + b toplamı kaçtır?

$\infty-\infty$ belirsizliği

$\infty-\infty$ belirsizliği ile karşılaşırsanız bunları ilk önce $\dfrac{0}{0}$ veya $\dfrac{\infty}{\infty}$ biçimine getirin ve daha sonra da bilinen yöntemlerle limiti hesaplayın.

Çok uzatmaya gerek yok. Bakın antrenmanlara.☺
Eğer belirsizlik aşağıdaki gibi ise payda eşitleyin ve $\dfrac{0}{0}$ a dönüştürerek devam edin.

1. $\lim\limits_{x\to1^+} \left(\dfrac{2}{x^2-1}-\dfrac{1}{x-1}\right)$

limitinin değeri kaçtır?

2. $\lim\limits_{x\to3^+} \left(\dfrac{6}{x^2-9}-\dfrac{1}{x-3}\right)$

limitinin değeri kaçtır?

3. $\lim\limits_{x\to2^-} \left(\dfrac{4}{x^2-4}-\dfrac{1}{x-2}\right)$

limitinin değeri kaçtır?

4. $\lim\limits_{x\to2^+} \left(\dfrac{3}{x^2-x-2}-\dfrac{1}{x-2}\right)$

limitinin değeri kaçtır?

5. $\lim\limits_{x\to5^+} \left(\dfrac{1}{x^2-9x+20}-\dfrac{1}{x-5}\right)$

limitinin değeri kaçtır?

6. $\lim\limits_{x\to-1^-} \left(\dfrac{1}{x^2+3x+2}-\dfrac{1}{x+1}\right)$

limitinin değeri kaçtır?

7. $\lim\limits_{x\to4^+} \left(\dfrac{4}{x-4}-\dfrac{1}{\sqrt{x}-2}\right)$

limitinin değeri kaçtır?

Ama bazen belirsizliği yok etmek o kadar kolay olmayabilir. Ya pay ve paydayı paydanın eşleniği ile çarpıp işlem yaparsınız ya da formül (biliyorsanız tabii ki) kullanırsınız.

8. $\lim_{x \to \infty} \left(x - \sqrt{x^2 + 2x}\right)$

limitinin değeri kaçtır?

9. $\lim_{x \to \infty} \left(\sqrt{x^2 + 4x + 4} - x + 3\right)$

limitinin değeri kaçtır?

10. $\lim_{x \to \infty} \left(\sqrt{x^2 - 4x + 3} - x + 3\right)$

limitinin değeri kaçtır?

11. $\lim_{x \to \infty} \left(\sqrt{x^2 + 4x - 2} - x + 5\right)$

limitinin değeri kaçtır?

Formül dediğim şey de şu. Bilirseniz epey bir kolaylık sağladığı sorular var. Göreceksiniz.

$$\lim_{x \to \mp\infty} \sqrt{ax^2 + bx + c} = \lim_{x \to \mp\infty} \sqrt{a}\left|x + \frac{b}{2a}\right| \text{dır.}$$

Örnek Soru

$\lim_{x \to \infty} \left(\sqrt{x^2 + 4x + 1} - \sqrt{x^2 - 2x - 3}\right)$

limitinin değeri kaçtır?

Çözelim☺

Formül kullancaz. Ne de olsa vaktimiz değerli☺

$\lim_{x \to \infty} \left(\sqrt{x^2 + 4x + 1} - \sqrt{x^2 - 2x - 3}\right)$ yerine

$\lim_{x \to \infty} \left(\sqrt{1}\left(x + \frac{4}{2.1}\right) - \sqrt{1}\left(x + \frac{-2}{2.1}\right)\right)$ yazabiliyoruz.

Gerisi zaten kolay. Gerekli işlemlerden sonra sonucun 3 olduğunu bulursunuz artık.

12. $\lim_{x \to \infty} \left(2x - \sqrt{4x^2 - 8x + 1}\right)$

limitinin değeri kaçtır?

13. $\lim_{x \to \infty} \left(x - \sqrt{x^2 - 8x + 1}\right)$

limitinin değeri kaçtır?

14. $\lim_{x \to \infty} \left(\sqrt{9x^2 + 6x + 2} - 3x + 2\right)$

limitinin değeri kaçtır?

1. $\lim_{x \to \infty} \left(3x - \sqrt{4x^2 + 16x + 3}\right)$

limitinin değeri nedir?

2. $\lim_{x \to \infty} \left(\sqrt{x^2 + 6x + 1} - x\right)$

limitinin değeri kaçtır?

3. $\lim_{x \to \infty} \left(2x - \sqrt{4x^2 - 8x + 1}\right)$

limitinin değeri kaçtır?

4. $\lim_{x \to \infty} \left(2x - 1 - \sqrt{4x^2 - 16x + 7}\right)$

limitinin değeri kaçtır?

5. $\lim_{x \to \infty} \left(\sqrt{9x^2 + 6x + 2} - \sqrt{9x^2 + 2}\right)$

limitinin değeri kaçtır?

6. $\lim_{x \to \infty} \left(x - \sqrt{x^2 + 6x + 2}\right)$

limitinin değeri nedir?

7. $\lim_{x \to \infty} \left(x - 2 - \sqrt{4x^2 + 4x + 1}\right)$

limitinin değeri nedir?

8. $\lim_{x \to \infty} \left(\sqrt{x^2 + mx} - x\right) = 1$

olduğuna göre, m kaçtır?

9. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{4x^2-bx+c}-2x+1\right)=2$

olduğuna göre, b kaçtır?

10. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+bx+2}-x+3\right)=6$

olduğuna göre, b kaçtır?

$0\cdot\infty$ belirsizliği

Bu tür bir belirsizlikle karşılaşırsanız ilk önce bunları $\frac{\infty}{\infty}$ veya $\frac{0}{0}$ belirsizliklerinden birine dönüştürün ve limitlerini ondan sonra hesaplayın.

Tamam mı?
Nasıl yapacağınızı da siz düşünün. Benden söylemesi.☺
Neyse... Bi tanecik göstereyim bari☺

Örnek Soru

$\lim\limits_{n\to\infty} n.\sin\frac{3}{n}$ **limitinin değeri kaçtır?**

Çözelim☺

$n\to\infty$ için verilen limit değeri $\infty.0$ oluyor. Peki, bunu $\frac{0}{0}$ a nasıl dönüştüreceğiz? O da şöyle:

$\lim\limits_{n\to\infty} n.\sin\frac{3}{n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sin\frac{3}{n}}{\frac{1}{n}}=3$ olur. (Hatırlayın. sin leri ve tan ları silerek işlem yapıyorduk. O mesele.) Gerçi taaa en başta silseniz de olur da...
Ama neyse... ☺

11. $\lim\limits_{n\to\infty} n^2.\sin\frac{5}{n^2}$

limitinin değeri kaçtır?

12. $\lim\limits_{n\to\infty} 4n.\sin\frac{3}{2n+3}$

limitinin değeri kaçtır?

13. $\lim\limits_{x\to\infty} -2x\tan\frac{3}{x}$

limitinin değeri kaçtır?

14. $\lim\limits_{x\to\infty}(2x+1)\sin\frac{6}{x}$

limitinin değeri kaçtır?

1. $\lim\limits_{x\to\infty}(2x-3)\tan\frac{1}{x}$

limitinin değeri kaçtır?

2. $\lim\limits_{n\to\infty}(3n-1)\sin\frac{2}{n}$

limitinin değeri kaçtır?

3. $\lim\limits_{n\to\infty} 2n^2.\sin\frac{4}{n^2-n+2}$

limitinin değeri kaçtır?

4. $\lim\limits_{x\to2}\left(\frac{1}{x-2}\right)\tan(5x-10)$

limitinin değeri kaçtır?

1^∞ belirsizliği

Şimdilik 1^∞ belirsizliğiyle ilgili olarak şimdilik sadece özel bir durumunu göstereceğim. Siz de şimdilik bu kadarını öğrenin yeter. Buna bile gerek yok da aslında. Her neyse işte... Meraklıları için anlattım.☺ Gerisini türevden sonra öğrenirsiniz.

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{a}{bx+c}\right)^{nx+m}=e^{\frac{a.n}{b}}$$

5. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^x$

limitinin değeri nedir?

6. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{4}{x}\right)^x$

limitinin değeri nedir?

7. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x+1}\right)^{3x}$

limitinin değeri nedir?

8. $\lim_{x \to \infty} \left(1+\frac{3}{2x+1}\right)^{2x+1}$

limitinin değeri nedir?

9. $\lim_{x \to \infty} \left(1+\frac{1}{2x-3}\right)^{4x+3}$

limitinin değeri nedir?

10. $\lim_{x \to \infty} \left(1-\frac{2}{x+2}\right)^{-3x+1}$

limitinin değeri nedir?

Bazen parantez içindeki 1 i hazır vermezler. Ama olsun sıkıntı değil. Siz de payı paydaya bölüp elde edersiniz.☺

Örneğin

$\frac{2x+2}{2x-1} = 1+\frac{3}{2x-1}$ olarak yazılabilir. (Bunu polinom bölmesi yaparak da görün isterseniz.☺

11. $\lim_{x \to \infty} \left(\frac{2x+3}{2x+1}\right)^{x}$

limitinin değeri nedir?

12. $\lim_{x \to \infty} \left(\frac{2x+5}{2x+1}\right)^{2x+1}$

limitinin değeri nedir?

13. $\lim_{x \to \infty} \left(\frac{3x+5}{3x+1}\right)^{2x-1}$

limitinin değeri nedir?

14. $\lim_{x \to \infty} \left(\frac{x+2}{x-2}\right)^{2x+3}$

limitinin değeri nedir?

Dizinin Limiti

Dizinin limitinde yeni bir şey yok. Önceki bilgilerle çözülebilecek şeyler. Burada tek fark dizinin limitine $n \to \infty$ için bakılır.

(a_n) bir reel sayı dizisi olmak üzere, $n \to \infty$ için a_n bir a sayısına yaklaşıyorsa (a_n) dizisinin limiti a dır denir. Ve bu $\lim_{n \to \infty} (a_n) = a$ biçiminde gösterilir.

Yani, dizinin limiti $n \to \infty$ için dizinin yaklaştığı değer demektir.

Anlayacağınız dizinin limiti için ∞ ile ilgili işlemleri bilmek lâzım.

Örnek Soru

Genel terimi $a_n = \frac{4n+5}{2n+1}$ olan (a_n) dizisinin limiti kaçtır?

Çözelim☺

Aslında burada yeni bir şey yok☺

Dizinin limiti $n \to \infty$ için dizinin yaklaştığı değer olduğu için bu dizinin limiti

$\lim_{n \to \infty} (a_n) = \lim_{n \to \infty} \left(\frac{4n+5}{2n+1}\right) = 2$ dir.

1. **Genel terimi, $a_n = 4+\frac{1}{n}$ olan (a_n) dizisinin limiti kaçtır?**

2. **Genel terimi, $a_n = \frac{3n-1}{n+3}$ olan (a_n) dizisinin limiti kaçtır?**

3. $\lim_{n \to \infty} \left(\frac{3-2n}{2n+1}\right)$

limitinin değeri kaçtır?

4. $\lim_{n \to \infty} \left(\frac{4n^2+1}{n^2+3n-1}\right)$

limitinin değeri kaçtır?

5. $\lim_{n \to \infty} \left(\frac{4n+1}{n^2+n+1}\right)$

limitinin değeri kaçtır?

6. $\lim_{n \to \infty} \left(\frac{2n^2+4}{5n+6}\right)$

limitinin değeri kaçtır?

7. $\lim_{n\to\infty}\left(3n\cdot\sin\frac{2}{n}\right)$

limitinin değeri kaçtır?

8. $\lim_{n\to\infty}\left((4n+2)\cdot\tan\frac{1}{2n+1}\right)$

limitinin değeri kaçtır?

9. $\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+4n+1}-n+3\right)$

limitinin değeri kaçtır?

10. **Genel terimi,** $a_n=\left(\frac{n+4}{n+1}\right)^{2n+1}$ **olan** (a_n) **dizisinin limiti kaçtır?**

11. $a_n=\sum_{k=1}^{n}(6k-1)$

olduğuna göre, $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n^2+2}$ **limitinin değeri kaçtır?**

12. **Genel terimi,** $a_n=\sqrt{n^2+2n}-n+2$ **olan** (a_n) **dizisinin limiti kaçtır?**

13. **Genel terimi,** $a_n=2n\tan\frac{3}{n}$ **olan** (a_n) **dizisinin limiti kaçtır?**

14. **Genel terimi,** $a_n=\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}(4k-1)$ **olan** (a_n) **dizisinin limiti kaçtır?**

Sonsuz Geometrik Dizinin Toplamı

Sonsuz toplamı bulmak imkânsız gibi gelebilir. Ama burada hesaplanabilenlerle uğraşcaz.
Ve kesinlikle acayip kolay☺
Bir sürü ayrıntıya girmeyip sadece soruları çözerken size ne lâzımsa onu verecem.

Ortak çarpanı r olan sonsuz terimli bir geometrik dizinin ilk n terim toplamının limiti dizinin toplamına eşittir.
Dolayısıyla sonsuz geometrik dizinin terimleri toplamı

$\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}a_1\cdot\frac{1-r^n}{1-r}=\frac{a_1}{1-r}$ olur.

Yani, size lâzım olan sadece ilk terim ve r dir. Bunun için toplamın ilk iki terimini yazmanız yeterli. Zaten a_1 den kasıt ilk terimdir. **r yi de ikinci terimi birinci terime bölerek bulun.**
Bir örnekle de izah edeyim. Göreceksiniz ki çok kolay☺

Örnek Soru

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$$

ifadesinin değeri kaçtır?

Çözelim☺
Çok kolay.☺
Sonsuz toplamları hesaplarken yapmanız gereken ilk iki terimi yazmak. Yazalım.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}=\left(\frac{2}{3}\right)^0+\left(\frac{2}{3}\right)^1+\ldots=1+\frac{2}{3}+\ldots$$

Daha fazlasına gerek yok.
Bu toplamdaki ilk terim $a_1=1$ ve ikinci terim $a_2=\frac{2}{3}$ tür. Zaten bize ilk terim ve r lâzım.
Hımmm.
Demek ki r yi bulmak icap ediyor. ☺
r yi daima ikinci terimi birinci terime bölerek buluyoruz. $r=\frac{a_2}{a_1}=\frac{\frac{2}{3}}{1}=\frac{2}{3}$ tür.
Bu durumda sonsuz toplamın değeri
$\frac{a_1}{1-r}=\frac{1}{1-\frac{2}{3}}=3$ e eşit olur.
Var mı bir zorluğu?

1. $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{3^k}$

ifadesinin değeri kaçtır?

2. $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k}$

toplamının değeri kaçtır?

3. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^{n-1}}{5^n}$

toplamının değeri kaçtır?

4. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3}{4^n}$

toplamının değeri kaçtır?

5. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}$

toplamının değeri kaçtır?

6. $\sum_{n=-1}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^{n}$

toplamının değeri kaçtır?

7. $x^2-2x+5=0$ denkleminin kökleri p ve q dur.

Buna göre, $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}\right)^{n}$ **toplamı kaçtır?**

8. $a<b<2$ olmak üzere,

$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{a}{2b}\right)^{n}$

ifadesinin değeri nedir?

9. $0<a<3$ olmak üzere,

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a^{n-1}}{3^n}=1$

olduğuna göre, a kaçtır?

10. $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{3^n}+\left(\frac{2}{3}\right)^{n}\right)$

ifadesinin değeri kaçtır?

11. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1+3^n}{4^n}$

toplamının değeri kaçtır?

12. $0<x<1$ olmak üzere,

$\sum_{n=1}^{\infty}x^n=\frac{2}{3}$

olduğuna göre, x kaçtır?

1. 5 metre yükseklikten düz bir zemine bırakılan bir top her yere vuruşundan sonra bir önceki yüksekliğinin $\frac{2}{3}$ ü kadar yükseliyor.

Topun dengeleninceye kadar alacağı yol kaç metredir?

2. 6 metre yükseklikten düz bir zemine bırakılan bir top her yere vuruşundan sonra bir önceki yüksekliğinin $\frac{2}{5}$ i kadar yükseliyor.

Topun dengeleninceye kadar alacağı yol kaç metredir?

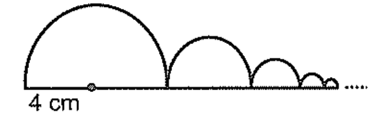
3. Yarıçapı 4 cm olan bir çember içine, aynı merkezli ve her birinin yarıçapı bir öncekinin yarısı kadar olan sonsuz tane çember çiziliyor.

Elde edilen çemberlerin çevrelerinin toplamı kaç π cm dir?

4. Çevresi 18 cm olan bir üçgenin kenarlarının orta noktaları birleştirilerek yeni bir üçgen elde ediliyor ve bu işlem elde edilen her yeni üçgene uygulanarak sonsuz çoklukta üçgen elde ediliyor.

Bu üçgenlerin çevreleri toplamı kaç cm dir?

5.

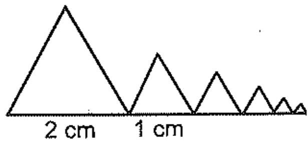


En büyüğünün yarıçapı 4 cm olan ve her birinin yarıçapı bir öncekinin yarıçapını yarısına eşit olan sonsuz çokluktaki yarım daire şeklindeki levhaların çevreleri toplamı kaç cm dir?

6. Bir kenarı $6\sqrt{3}$ cm olan eşkenar üçgenin içine kenarlarının orta noktaları birleştirilerek yeni bir eşkenar üçgen çizilerek bu işleme sonsuz çoklukta devam ediliyor.

Buna göre, elde edilen eşkenar üçgenlerin çevreleri toplamı kaç cm dir?

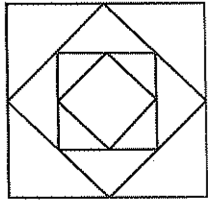
7.



Şekilde kenar uzunluğu 2 cm olan eşkenar üçgenin sağına kenar uzunluğu bunun yarısına eşit bir eşkenar üçgen daha çiziliyor ve bu işleme sonsuz çoklukta devam ediliyor.

Elde edilen üçgenlerin alanları toplamı kaç cm^2 **dir?**

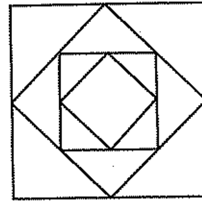
8.



Bir kenarı 4 cm olan karenin içine kenarlarının orta noktaları birleştirilerek yeni bir kare çizilerek bu işleme sonsuz çoklukta devam ediliyor.

Buna göre, elde edilen karelerin çevreleri toplamı kaç cm dir?

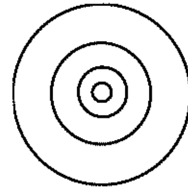
9.



Bir kenarı 6 cm olan karenin içine kenarlarının orta noktaları birleştirilerek yeni bir kare çizilerek bu işleme sonsuz çoklukta devam ediliyor.

Buna göre, elde edilen karelerin alanları toplamı kaç cm^2 dir?

10.



Şekilde en dıştakinin yarıçapı 3 cm olan çemberin içine aynı merkezli yarıçapı bunun yarıçapının yarısına eşit olan yeni bir çember çiziliyor. Bu işleme içe doğru devam edilerek sonsuz çoklukta çemberler çiziliyor.

Elde edilen sonsuz çokluktaki çemberlerin çevreleri toplamı kaç cm dir?

SÜREKLİLİK

Süreklilik olayı çok daha kısa. Ve limitten daha basit kesinlikle. Ve çok fazla soru çeşidi de yok.

Önce şu küçük soruya cevap verelim.

Sürekli eğri (fonksiyon) ne demektir?

Biraz ilkel ama çok mantıklı bir tanımı var.☺

Bir eğriyi (ya da doğruyu) koordinat düzleminde elinizi kaldırmadan çizebiliyorsanız bu eğri (ya da doğru) süreklidir.

Bu arada şunu da söyleyeyim. Limit kapısından girmeden süreklilik kapısı tıklatılamaz. **Yani, limit olmayan noktada süreklilik olmaz.**

Bir Noktada Süreklilik

Bir fonksiyonun herhangi bir noktada sürekli olması için bu noktadaki limit değeri ile tanımlı olduğu değerin eşit olması gerekir.

Birazdan izah etcem. Ama şunu bilin ki, bir fonksiyon herhangi bir noktada

Tanımlı değilse,

Limiti yoksa

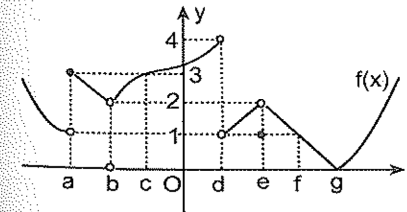
Tanımlı olduğu değer ile limiti birbirinden farklıysa bu noktada sürekli değildir.

Yani, bir f fonksiyonunun x = a noktasında sürekli olması için bu noktadaki limit değeri ile tanımlı olduğu değer eşit olmalıdır.

Yani, $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$ olmalıdır.

Bu söylediklerimi grafik üzerinde izah edeyim.

Aşağıdaki f fonksiyonun apsisi a, b, c, d, e, f ve g olan noktalarda sürekli olup olmadığına bakalım.



x = a noktasında, fonksiyonun limiti yok. (Çünkü bu noktada sağdan ve soldan limiti aynı değil). Dolayısıyla sürekliliği incelemenin alemi yok. Limit olmayan noktada süreklilik zaten olmaz..

x = b noktasında limit var. Ama fonksiyon bu noktada tanımlı olmadığı için burada da sürekli değil.

x = c noktasında limit değeri ile tanımlı olduğu değer aynı olduğundan sürekli.

x = d noktasında limit olmadığından sürekli değil.

x = e noktasında limit var ve de tanımlı. Ama limit değeri ile tanımlı olduğu değer farklı olduğundan dolayı bu noktada sürekli değil.

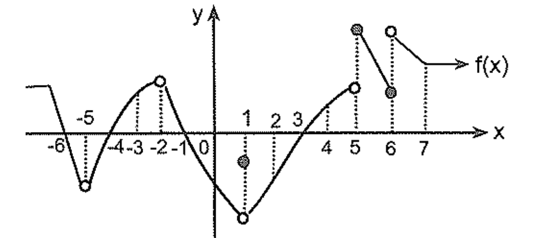
x = f ve x = g de ise süreklidir.

Aslında bu olayın özeti ne biliyor musunuz?

Grafikte sıçrama ve boşluk olan noktalarda fonksiyon süreksizdir. Bir de bu gözle bakın az önceki grafiğe.

x = a ve x = d de sıçrama olduğundan, x = b, x = d ve x = e nin hizasında da boşluklar olduğundan bu noktalarda süreksizdir. Geri kalan her noktada süreklidir.

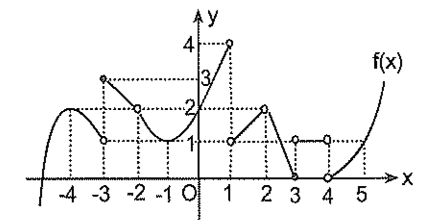
1.



Şekilde f(x) fonksiyonunun grafiği verilmiştir.

Buna göre, f fonksiyonu (– 6, 7) aralığındaki kaç noktada süreksizdir?

2.



Şekilde grafiği verilen f fonksiyonunun [– 4, 5] aralığında sürekli olduğu tam sayıların toplamı kaçtır?

Süreklilik soruları daha çok şimdi vereceğim şekilde (Yani, parçalı fonksiyonda) sorulur.
Ama göreceksiniz ki bu da çok basit. Birini ben çözeyim.

Örnek Soru

$$f(x)=\begin{cases} mx+2, & x<2 \text{ ise} \\ 8, & x=2 \text{ ise} \\ n-x, & x>2 \text{ ise}\end{cases}$$

fonksiyonu x = 2 noktasında sürekli olduğuna göre, m + n toplamı kaçtır?

Çözeyim☺

x = 2 bu fonksiyonun kritik değeri. 2 dışında her yerde süreklidir zaten. Bu ayrı mesele. Ama x = 2 de sürekli olması için bu noktadaki sağdan limiti, soldan limiti ve f(2) nin eşit olması lâzım. Yani,

$\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=f(2)$ olması lâzım.

Buradan dan n – 2 = m.2 + 2 = 8 eşitliği elde edilir ki bundan sonrası cebirsel yetenek☺
2m + 2 = 8 ise m = 3 ve n – 2 = 8 ise n = 10 ve m + n de 13 tür.
Anladınız mı bunu?
Kısacası 2 yi üstte, ortada ve bir de altta yerine yazıp eşitledik. Siz de öyle yapın☺

3. $f(x)=\begin{cases} 3x+m, & x>2 \text{ ise} \\ x^3+2, & x\le 2 \text{ ise}\end{cases}$

fonksiyonu x = 2 de sürekli olduğuna göre, m kaçtır?

4. $f(x)=\begin{cases} ax+1, & x>2 \text{ ise} \\ x^2+x+1, & x\le 2 \text{ ise}\end{cases}$

fonksiyonu x = 2 de sürekli olduğuna göre, a kaçtır?

5. $f(x)=\begin{cases} ax+a-1, & x<1 \text{ ise} \\ -x+6, & x\ge 1 \text{ ise}\end{cases}$

fonksiyonunun x = 1 noktasında sürekli olması için a kaç olmalıdır?

6. $f(x)=\begin{cases} ax^2+4, & x\ne 3 \text{ ise} \\ 13, & x=3 \text{ ise}\end{cases}$

fonksiyonunun x = 3 noktasında sürekli olması için a kaç olmalıdır?

7. $f(x)=\begin{cases} mx+6, & x<1 \text{ ise} \\ 9, & x=1 \text{ ise} \\ n-x, & x>1 \text{ ise}\end{cases}$

fonksiyonu x = 1 noktasında sürekli olduğuna göre, m + n toplamı kaçtır?

8. $f(x)=\begin{cases} mx+n, & x<-1 \text{ ise} \\ 9, & x=-1 \text{ ise} \\ 2x^2+n, & x>-1 \text{ ise}\end{cases}$

fonksiyonu gerçel sayılarda sürekli olduğuna göre, m.n çarpımı kaçtır?

1. $f(x)=\begin{cases} x^2+m, & x<-2 \text{ ise} \\ -2, & x=-2 \text{ ise} \\ 3x^2-n, & x>-2 \text{ ise}\end{cases}$

fonksiyonu gerçel sayılarda sürekli olduğuna göre, m + n toplamı kaçtır?

2. $f(x)=\begin{cases} 2x^2+m, & x<-1 \text{ ise} \\ -2, & -1\le x\le 1 \text{ ise} \\ 3x+n, & x>1 \text{ ise}\end{cases}$

fonksiyonu gerçel sayılarda sürekli olduğuna göre, m + n toplamı kaçtır?

3. $f(x)=\begin{cases} \dfrac{\sin 2x}{x}, & x<0 \text{ ise} \\ m, & x=0 \text{ ise} \\ n\cos\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right), & x>0 \text{ ise}\end{cases}$

fonksiyonu x = 0 noktasında sürekli olduğuna göre, m + n toplamı kaçtır?

Bir fonksiyon paydasının sıfır olduğu yerde sürekli değildir. Ama niye?
Bir de bu fonksiyon parçalı filan ise paydayı sıfır yapan değerin tanım aralığında olup olmaması da önemli.
Kısacası tanım aralığındaki paydayı sıfır yapan x değerleri için fonksiyon sürekli değildir. Tabii ki kritik değerlerdeki sürekliliği de incelemek gerek. Yoksa yamulma olasılığı mevcut.☺

4. $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x+10}{x^3-4x}, & x<1 \text{ ise} \\ \dfrac{4x+2}{x^2-3x}, & x\ge 1 \text{ ise}\end{cases}$

fonksiyonunun kaç farklı noktada süreksizdir?

5. $f(x)=\begin{cases} \dfrac{2x+6}{x+3}, & x<1 \text{ ise} \\ -x+2, & 1\le x\le 3 \text{ ise} \\ \dfrac{x^2-1}{3x-1}, & x\ge 3 \text{ ise}\end{cases}$

fonksiyonunun süreksiz olduğu noktaların apsisleri toplamı kaçtır?

6. $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x+10}{x^2-4}, & x<-1 \text{ ise} \\ x+4, & -1\le x\le 2 \text{ ise} \\ \dfrac{x^2+2}{x^2-3x}, & x\ge 2 \text{ ise}\end{cases}$

fonksiyonunun süreksiz olduğu noktaların apsisleri toplamı kaçtır?

Bir fonksiyon tanımsız olduğu noktalarda süreksizdir. Aslında bu tür sorularda fonksiyonun tanım aralığını bulun yetiyor. Tanımlı olduğu aralık aynı zamanda sürekli olduğu aralıktır da.

7. $f(x)=\frac{1-x}{x-4}+\frac{3}{x-2}$

fonksiyonu kaç noktada süreksizdir?

8. $f(x)=\frac{2}{x-3}+\frac{3}{x-2}+4x-1$

fonksiyonun süreksiz olduğu x değerlerinin toplamı kaçtır?

9. $f(x)=\frac{1-x}{x^2-4}+\frac{3}{x^2}$

fonksiyonu kaç noktada süreksizdir?

10. $f(x)=\frac{3x-2}{x^2-3x-4}+\frac{2}{x^2+1}$

fonksiyonu kaç noktada süreksizdir?

11. $f(x)=\frac{1-x}{x^2-x-6}+\frac{3}{x-m}$

fonksiyonunun süreksiz olduğu noktaların toplamı 4 olduğuna göre, m kaçtır?

12. $f(x)=\frac{-x+2}{|2x-1|-5}$

fonksiyonunu süreksiz yapan x değerlerinin toplamı kaçtır?

13. $f(x)=\frac{x^3+1}{|x-3|-|2x|}$

fonksiyonunu süreksiz yapan x değerlerinin toplamı kaçtır?

14. $f(x)=\frac{2}{x^2-(m-1)x-1}$

fonksiyonunun süreksiz olduğu noktaların toplamı 4 olduğuna göre, m kaçtır?

1. $f(x)=\frac{5}{2-\sqrt[3]{x}}$

fonksiyonu x in hangi değeri için süreksizdir?

2. $f(x)=\frac{3x-5}{1-\log_7\left(x^2+6\right)}$

fonksiyonu x in hangi pozitif değeri için süreksizdir?

Köklü fonksiyonların tanım aralığını hatırlıyorsunuz değil mi?
Kök derecesi çift ise kök içi ≥ 0 olmalı
Kök derecesi tek ise kökten dolayı tanımsızlık olmaz. Kök içi tanımlıysa sıkıntı yoktu.

3. $f(x)=\sqrt{x-5}$

fonksiyonunun sürekli olduğu en geniş aralık nedir?

4. $f(x)=\sqrt{x-2}$

fonksiyonunun süreksiz olduğu en geniş aralık nedir?

5. $f(x)=1+\sqrt[3]{x-2}$

fonksiyonunun sürekli olduğu en geniş aralık nedir?

6. $f(x)=\sqrt[3]{\frac{1}{x}-\frac{3}{x-2}}$

fonksiyonunun sürekli olduğu en geniş aralık nedir?

7. $f(x)=\sqrt{x-5}+\sqrt[3]{3-x}$

fonksiyonunun sürekli olduğu en geniş aralık nedir?

8. $f(x)=\sqrt{x-2}+\sqrt{7-x}$

fonksiyonunun sürekli olduğu tam sayıların toplamı kaçtır?

9. $f(x)=\sqrt{9+8x-x^2}$

fonksiyonu x in kaç farklı tam sayı değeri için süreklidir?

10. $f(x)=\sqrt{x^2+2x-24}$

fonksiyonu x in kaç farklı tam sayı değeri için süreksizdir?

11. $f(x)=\sqrt{\frac{2}{x-3}-1}$

fonksiyonunun sürekli olduğu en geniş aralık nedir?

12. $f(x)=\sqrt{\frac{2}{x-1}-\frac{1}{x+2}}$

fonksiyonunun sürekli olduğu en geniş aralık nedir?

13. $f(x)=\sqrt{x-\frac{12}{x-1}}$

fonksiyonunun süreksiz olduğu en geniş aralık nedir?

14. $f(x)=\sqrt{7-|2x-3|}$

fonksiyonunun sürekli olduğu en geniş aralık nedir?

15. $f(x)=\sqrt{|x-2|-3}$

fonksiyonunun sürekli olduğu en geniş aralık nedir?

16. $f(x)=\log_5(3x-12)$

fonksiyonunun sürekli olduğu en geniş aralık nedir?

Türev Alma Kuralları

Erişmek istedikleri bir hedefi olmayanlar,
çalışmaktan zevk almazlar.
Emile Raux

Pek çok konuda başarı, başarmanın ne kadar vakit
alacağını bilmeye bağlıdır.
Montesqieu

TÜREV ALMA KURALLARI

Türev muhabbeti biraz uzun sürecek.☺
Ve kesinlikle çok çok önemli bir konu. Ne kadar çalışılsa değer. Size tavsiyem; bu konuya çalışırken her bir alt başlığı tek tek ele alın ve probleminiz olmadığından emin olup öyle geçin. Erken bitirme telaşına kapılmadan sindire sindire gidin. Ki integralde rahat edesiniz.
Ve çalışırken daha ne kadar çok şey kaldığına değil de ne kadar çok şey öğrendiğinize odaklanın. Ki moraliniz bozulmasın.☺
Ve şunu da söyleyeyim. Türev alma kurallarını adam gibi öğrendiğinizde antrenmanları çok rahat bir şekilde yaptığınızı göreceksiniz. Ve antrenmanları yapabildiğinizi görünce de acayip bir keyif alacaksınız.
Ne de olsa artık türev yapıyorsunuz.☺
Ayrıca hiç hoşlanmadığınızı bildiğim o teorik ve soğuk tanımlara ve ispatlara da çok fazla girmiycem. Onun için canınızı sıkmayın.☺

$y = f(x)$ fonksiyonunun türevi $f'(x)$, y', $\frac{dy}{dx}$, $\frac{df}{dx}$ gösterimlerinden herhangi biriyle gösterilebilir.

$\frac{df}{dx}$ ifadesi f fonksiyonunun x e göre,

$\frac{df}{dt}$ ifadesi f fonksiyonunun t ye göre,

$\frac{d}{da}(f)$ ifadesi f fonksiyonunun a ya göre türevi demektir.

Türev Alma Kuralları
Sabit Fonksiyonun Türevi

$f(x) = c$ ise $f'(x) = 0$ dır

Yani **sabit fonksiyonun (sayıların) türevi sıfırdır.** Bir fonksiyonun sabit olup olmadığını da anlarsınız herhalde.☺

a) $f(x) = 5$

b) $f(x) = 3a + 2$

c) $f(x) = \sqrt{2} + 1$

d) $f(x) = 0$

e) $f(x) = -\frac{3}{2}$

$f(x) = x^n$ fonksiyonunun türevi

$f(x) = x^n$ ise $f'(x) = n \cdot x^{n-1}$

Yani, x in üssü kat sayı olarak başa geliyor ve üs bir azalıyor. İşte bu çok önemli.
Ayrıca $f(x) = ax^n$ olursa $f'(x) = a \cdot n \cdot x^{n-1}$ olur.

Aşağıdaki fonksiyonların türevini alarak başlayın bakalım. Hadi kolay gelsin.☺

1. $y = x^3$ ise $y' =$

2. $y = x$ ise $y' =$

3. $y = -3x$ ise $y' =$

4. $y = \frac{3}{4}x$ ise $y' =$

5. $y = \frac{1}{3}x^6$ ise $y' =$

6. $y = 3x^5$ ise $y' =$

7. $y = \frac{3}{2}x^8$ ise $y' =$

8. $y = \frac{5x}{3}$ ise $y' =$

9. $y = x^{-1}$ ise $y' =$

10. $y = \frac{1}{x}$ ise $y' =$

Hatırlıyor olmanız lâzım. Köklü ifadeler üslü biçimde yazılabiliyordu. Meselâ $\sqrt[3]{x^2} = x^{\frac{2}{3}}$ idi.

11. $y = \sqrt{x}$ ise $y' =$

12. $y = \sqrt[4]{x^3}$ ise $y' =$

13. $y = \frac{3}{2}x^5$ ise $y' =$

14. $y = -3x^2$ ise $y' =$

Bazen küçük ayarlar gerekebilir.
Meselâ $\frac{2}{x^3} = 2 \cdot x^{-3}$ olarak düşünülebilir.

15. $y = \frac{6}{\sqrt{x}}$ ise $y' =$

16. $y = \frac{-2}{x^3}$ ise $y' =$

17. $y = -3x^{-4}$ ise $y' =$

18. $y = \frac{x^6}{3}$ ise $y' =$

19. $y = \frac{-3}{4x^4}$ ise $y' =$

Tabii ki türev her zaman y ' = ? şeklinde ifade edilecek diye bir kural da yok.

20. $y = 4x^2$ **ise** $\frac{dy}{dx}$ **ifadesinin eşiti nedir?**

21. $\frac{d}{dx}\left(-2x^3\right)$ **ifadesinin değeri nedir?**

22. $\frac{d}{dx}\left(4\sqrt{x}\right)$ **ifadesinin değeri nedir?**

23. $\frac{d}{dx}\left(\frac{2}{3x^2}\right)$ **ifadesinin değeri nedir?**

Ve fonksiyon her zaman x e bağlı olacak diye de bir kural yok. Aşağıdaki gibi farklı değişkenlere de bağlı olabilir.

24. $y = 5t^2$ ise $\frac{dy}{dt}$ **ifadesinin eşiti nedir?**

25. $y = 4a^3$ ise $\frac{dy}{da}$ **ifadesinin eşiti nedir?**

26. $y = -3m^2$ ise $\frac{dy}{dm}$ **ifadesinin eşiti nedir?**

Bir diğer kural toplamın türeviyle ilgili

$$(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$$

Yani, iki fonksiyonun toplamının (veya farkının) türevini alırken her birinin tek tek türevini alın ve bırakın. Gördüğünüz gibi bi zorluğu yok. Öyle değil mi? Bence örnek bile yapmaya gerek yok. Direkt antrenmanlara başlayın.☺

Aşağıdaki fonksiyonların türevlerini bulun bakalım.

1. $y = 3x^2 - 2x + 3$

2. $y = 5x^3 - 2x^2 - 4$

3. $y = \frac{2}{3}x^6 - x^5 - 4x - 3$

4. $y = 3x + 2$

5. $y = x^2 + 2\sqrt{x}$

6. $y = \frac{1}{5}x^{10} - \frac{2}{3}x^6$

7. $y = 2x^4 - 5x^2 + 3x - 2$

8. $y = 2x^3 - \frac{2}{x} + 1$ ise $\frac{dy}{dx}$ **neye eşittir?**

9. $f(t) = 2t^3 - 4t + 2$ ise $\frac{df}{dt}$ **neye eşittir?**

10. $f(t) = t^3 - 6t^2 - 3t + 2$ **ise** $\frac{df}{dt}$ **neye eşittir?**

11. $y = x^2(2x+1)$ ise $\frac{dy}{dx}$ **in eşiti nedir?**

12. $y = x^3\left(\frac{x}{4} + \frac{1}{3}\right)$ ise $\frac{dy}{dx}$ **in eşiti nedir?**

13. $y = 3x^4\left(-x^2 + 2x\right)$ ise $\frac{dy}{dx}$ **in eşiti nedir?**

Örnek Soru

$f(x) = 2x^5 + 6\sqrt{x} - x^2 + 2$

olduğuna göre, $f'(1)$ kaçtır?

Çözelim.☺

Bu tür sorularla epey bi karşılaşacaksınız. f fonksiyonunun x = 1 noktasındaki türevini sormuşum. Yapacağınız şey çok basit. Fonksiyonun türevini aldıktan sonra x yerine 1 yazmak.

Yapalım.

$f'(x) = 2 \cdot 5x^4 + 6 \cdot \frac{1}{2} x^{\frac{-1}{2}} - 2x^1 + 0$

$= 10x^4 + \frac{3}{\sqrt{x}} - 2x$

Şimdi x yerine 1 yazabilirsiniz.

x = 1 için $f'(1) = 11$ bulursunuz artık☺

Var mı anlaşılmayan bi şey?

Devan edin bakalım.

14. $f(x) = 2x^4 + 3x^2 + 4x + 1$

olduğuna göre, $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=2}$ değeri kaçtır?

15. $f(x) = x^3 + 2mx - 4$

olmak üzere, $f'(1) = 5$ olduğuna göre, m kaçtır?

16. $f(x) = mx^3 + (m-1)x^2 - 13x + 4$

olmak üzere, $f'(1) = 10$ olduğuna göre, m kaçtır?

17. $f(x) = x^2 - 2x - 1$

$f'(m) = 6$

olduğuna göre m kaçtır?

18. $f(x) = 2x^2 - x + 5$

$f'(a) = f(2)$

olduğuna göre, a kaçtır?

19. $f(x) = x^2 - 3x + 7$

$f'(a) - 2f'(1) = 3$

olduğuna göre, a kaçtır?

20. m pozitif reel sayı olmak üzere,

$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2mx - 3$

$f'(m) = 15$

olduğuna göre, m kaçtır?

Çarpımın Türevi

$(f \cdot g)'(x) = f'(x) \cdot g(x) + g'(x) \cdot f(x)$

Yani, birincinin türevi çarpı ikinci artı ikincinin türevi çarpı birinci☺

Aşağıdaki fonksiyonların türevlerini alınız lütfen☺ Ki pratiğiniz artsın. Yaw böyle şeyler sorulur mu diye de düşünmeyin. Dediklerimi yapın. Ve tecrübeye güvenin. Soruyorsak bi bildiğimiz var herhalde☺

1. $f(x) = (x^2 + x)(x^2 - 2)$ **ise $f'(1)$ kaçtır?**

2. $f(x) = (x^4 - 1)(x^3 - x)$ **ise $f'(1)$ kaçtır?**

3. $f(x) = (x^2 - 3)(x^2 - 1)$ **ise $f'(2)$ kaçtır?**

4. $f(x) = (2x + 3)(x^2 - x + 1)$ **ise $f'(0)$ kaçtır?**

5. $f(x) = (x^2 + 2x - 1)(x + 3)$ **ise $f'(1)$ kaçtır?**

6. $\frac{d}{dx}\left[x^2\left(x^3 - x + 1\right)\right]$

ifadesinin x = 1 için değeri kaçtır?

Yine türev alıp x yerine 1 yazacaksınız.

7. $\frac{d}{dx}\left[\left(x^2 + x\right)\left(2x^2 - 3x + 1\right)\right]$

ifadesinin x = 1 için değeri kaçtır?

8. $f(x) = (2x^2 - x + 1)(2\sqrt{x} + 1)$

olduğuna göre, $f'(1)$ kaçtır?

9. $f(x) = (x^5 - x^4 + 2)(x^2 - 2x + 3)$

olduğuna göre, $f'(1)$ kaçtır?

Bölümün Türevi

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]=\frac{f'(x)\cdot g(x)-g'(x)\cdot f(x)}{[g(x)]^2}$$

Bunun Türkçesi şu: bölümün türevi eşittir birincinin türevi çarpı ikinci eksi ikincinin türevi çarpı birinci bölü ikincinin karesi.☺
Bi daha okuyun bakalım.
Tabi birinci dediğim pay ikincisi de payda olduğunu anlamış olmanız lâzım.
Biraz değişik gibi. Ama zor değil.

Bu formülcükleri bol soru çözerek kavramanız lâzım ki önünüze gelen soruları rahat çözebilesiniz.

10. $y=\frac{3x-1}{3x+1}$ ise y' neye eşittir?

11. $y=\frac{4x+3}{3x+2}$ fonksiyonunun türevi nedir?

12. $y=\frac{x^2+1}{x-1}$ ise y' neye eşittir?

13. $y=\frac{3x}{x^2+2}$ ise y' neye eşittir?

14. $y=\frac{2x+1}{x^2-1}$ fonksiyonunun türevi nedir?

15. $f(x)=\frac{2x^2+3x-1}{x^2+1}$ ise f'(1) kaçtır?

16. $\frac{d}{dx}\left(\frac{2x^2-4x+1}{x^2+x-1}\right)$

ifadesinin x = 1 için değeri kaçtır?

17. $\frac{d}{dx}\left(\frac{x^3-x+1}{x^2+3x-1}\right)$

ifadesinin x = 0 için değeri kaçtır?

18. $f(x)=\frac{x^2+2}{x^2-1}$

olduğuna göre, f '(2) değeri kaçtır?

19. $f(x)=\frac{x^3-x^2+1}{x-1}$

olduğuna göre, f '(2) değeri kaçtır?

Sadeleştirme yapmanız gereken yerde bunu ıskalarsanız amele gibi uğraşırsınız walla.☺

1. $f(x)=\frac{x^4-x^2}{x^2-1}$

olduğuna göre, f '(5) değeri kaçtır?

2. $f(x)=\frac{x^3-x^2-6x}{x^2-3x}$

olduğuna göre, f '(10) değeri kaçtır?

Parçalı Fonksiyonun Türevi

Parçalı biçimde tanımlanan bir fonksiyonun herhangi bir noktadaki türevini alacaksanız ilk önce bu noktanın kritik nokta olup olmadığına bakın. Eğer bu nokta kritik nokta değilse uygun olan parçaya göre türev alın. Ama bu nokta kritik nokta ise iş biraz sakat. (Onun için bundan sonrasını okumayanlara kızmıycam.☺)
Fonksiyonun ilk önce bu noktada sürekli olup olmadığına bakmak lâzım. Sürekli değilse zaten türeve de bakmaya gerek yok. Çünkü fonksiyonun sürekli olmadığı yerde türevi de olmaz. Kritik noktada sürekliyse eğer bu noktadaki sağdan ve soldan türevinin eşit olması lâzım. Kısacası kritik noktada, sürekli olup olmadığına ve sağdan - soldan türevlerinin eşit olup olmadığına bakın.
Neyse... Uzunca bir metin oldu. Ama parçalı fonksiyonların kritik noktadaki türevinin sorulacağını sanmıyorum. Sorarlarsa da bir soru yapmayıverirsiniz artık☺

Şaka şaka.☺ Çözemeyeceğiniz soruyu zaten sormazlar☺
Biliyorum. Örnek Soruyu bekliyorsunuz.

Örnek Soru

$$f(x)=\begin{cases} x^3+2x, & x>2 \text{ ise} \\ 4x^2-6x, & x\leq 2 \text{ ise}\end{cases}$$

fonksiyonunun x = 0, x = 2 ve x = 3 noktalarındaki türevleri kaça eşittir?

Çözelim mi?
Bir kere baştan şunu söyleyeyim. Bu fonksiyonda kritik nokta olan x = 2 dışındaki noktalarda türev bulmak çok basit. Meselâ x = 0 daki türevi bulalım. x = 0 için fonksiyonun alttaki parçasını kullancaz. Öyle değil mi?
Yani, $4x^2-6x$ in. Türevini alıp x yerine 0 yazacaksınız.
Bunun türevi 8x – 6 ve x = 0 için de $f'(0)=-6$ dır.
Anlaşıldı mı şimdi?
Peki, x = 3 deki türevi bulabilir misiniz?
Hangi parçasını kullancaz fonksiyonun? Üsttekini öyle değil mi?
O zaman üstteki parçanın türevini alarak x yerine 3 ü yazın ve f '(3) = 29 u bulun bakalım.
Ha! Bu arada "Niye birinde alttakini diğerinde üstekini kullandık ki?" diye aklına takılanlar olabilir.
İzah edeyim. x in 2 den küçük veya eşit değerleri için alttaki parça, 2 den büyük değerler için ise üstteki geçerli de ondan. Bunu nereden mi anlayacaksınız? Yanlarında yazıyor zaten.☺ Dikkatli bakın.

Gelelim x = 2 deki türeve.
Bir kere x = 2 kritik nokta. Onun için ilk önce bu noktada sürekli olup olmadığına bakmak lâzım.
Peki bakalım.

$$\lim_{x\to 2^+} f(x)=2^3+2.2=12$$

$$\lim_{x\to 2^-} f(x)=4.2^2-6.2=4$$

Sağdan ve soldan limiti eşit olmadığından sürekli değil. Onun için türevi var mı diye bakmanın bir âlemi yok.
Ama yine de söyleyeyim. Diyelim ki x = 2 de sürekli olsaydı o zaman iki parçanın da x = 2 için türevi aynı olmalıydı.
Ok☺

Destan gibi oldu yaw☺ Bunu anlatırken hiç bu kadar uzun olduğunu düşünmemiştim daha önce.

3. $f(x)=\begin{cases} 3x^2+4x, & x>1 \text{ ise} \\ 5x^2-2x, & x\leq 1 \text{ ise} \end{cases}$

olduğuna göre, $f'(2)$ değeri kaçtır?

4. $f(x)=\begin{cases} x^2+mx, & x>2 \text{ ise} \\ x^2-x, & x\leq 2 \text{ ise} \end{cases}$

$f'(3) = 11$ olduğuna göre, m kaçtır?

5. $f(x)=\begin{cases} x^2+mx, & x<0 \text{ ise} \\ x^3, & 0\leq x<4 \text{ ise} \\ 3x^2-2x, & x\geq 4 \text{ ise} \end{cases}$

$f'(-1) + f'(2) = 6$ olduğuna göre, m kaçtır?

6. $f(x)=\begin{cases} x^3+n, & x>1 \text{ ise} \\ x^2+mx, & x\leq 1 \text{ ise} \end{cases}$

fonksiyonu x = 1 noktasında türevlenebilir olduğuna göre, m + n toplamı kaçtır?

Mutlak Değer Fonksiyonunun Türevi

Mutlak değer fonksiyonunda, türev değeri aranan nokta kritik nokta değilse ilk önce bu nokta için verilen fonksiyonu tanımlayın. (Yani, mutlak değeri artı mı yoksa eksi mi açacağınızı belirleyip açın.) Sonra normal türev alın. Yalnız verilen nokta kritik nokta ise bir sağdan bir de soldan türev alıp eşit olup olmadıklarına bakmak lâzım.
Gerçi kritik noktalarda türev yoktur deseniz çoğu zaman isabet edersiniz. Adamlar gıcıklık yapmamışsa tabii ki.☺ Benden söylemesi☺
Sebebini boş verin.☺

Örnek Soru

$f(x)=x^3+|2x^2-6x|$

olduğuna göre, f '(–1), f '(2) ve f '(3) ün değerini bulalım.

Ve çözelim tabii ki☺
x = – 1 için mutlak değerin içi pozitif olduğundan (yazıp görün isterseniz☺) mutlak değeri artı olarak (yani, aynen) açın ve $f(x)=x^3+2x^2-6x$ i elde edin.
Sonra da türevini aldıktan sonra x yerine – 1 yazın.
Kaç buldunuz?
f '(–1) = – 7 bulduysanız f '(2) yi hesaplayabilirsiniz.
x = 2 için mutlak değerin içi negatif. İlk önce bunu görün. Mutlak değerin içi negatif olduğundan mutlak değeri eksi parantezinde açın.
Ne buldunuz?
$f(x)=x^3-(2x^2-6x)=x^3-2x^2+6x$ di mi?
Şimdi türevini alın ve x yerine 2 yazın bakalım.
$f'(x)=3x^2-4x+6$ ve $f'(2)=10$ sa sıkıntı yok.
Gelelim x = 3 deki türeve. x = 3 için mutlak değerin içi sıfır oluyor.
Eee.. . Şimdi n'tcez? Bu noktada türevi yoktur deyin geçin. %95 doğru çıkar☺ Sebebi mi?
Bence boş verin. Girmeyelim demiştim ya.☺

1. $f(x)=|x^2-3x+1|$ olduğuna göre,

a) f '(1) değeri kaçtır?
b) f '(3) değeri kaçtır?

2. $f(x)=|x-2|+|x+1|$

fonksiyonunun hangi noktalarda türevi yoktur?

3. $f(x)=|x^2-25|+|x^2+x|$

fonksiyonunun kaç noktada türevi yoktur?

4. $f(x)=|x^2-4|+|x+5|$

fonksiyonunun x = 2 noktasındaki türevi nedir?

5. $f(x)=|x^3-4|+2x-1$

olduğuna göre, $f(1)\cdot f'(1)$ çarpımı kaçtır?

6. $f(x)=x\cdot|x^3-3x|$

olduğuna göre, $f'(2)$ değeri kaçtır?

7. $f(x)=|x^3-x^2|+|2x-1|$

olduğuna göre, $f'(-1)$ değeri kaçtır?

8. $f(x)=|3x-5|+|7-2x|$

olduğuna göre, $f(0)+f'(2)$ toplamı kaçtır?

9. $f(x)=\dfrac{|x^2-3x|}{x-1}$

olduğuna göre, f'(2) değeri kaçtır?

10. $f(x)=\left|\dfrac{3x-2}{2x-7}\right|$

olduğuna göre, f'(2) değeri kaçtır?

11. $f(x)=|\sqrt{x}-5|$

olduğuna göre, f'(4) değeri kaçtır?

12. $f(x)=2x+|3x-10|-2$

olduğuna göre, f(3)+f'(3) toplamı kaçtır?

Bileşke Fonksiyonun Türevi

f ve g türevlenebilen iki fonksiyon olmak üzere,

$(f o g)'(x)=f'(g(x)).g'(x)$

Bileşke fonksiyonun türevinin en çok kullanıldığı soru türünü izah edeyim.

Örnek Soru

$f(x^3-4)=2x^3+6x-2$

olduğuna göre, f '(4) kaçtır?

Çözelim☺

f nin türevindeki 4 ün değeri sorulmuş. İlk önce f nin türevini bulcaz. Ama ortalıkta f(x) yok. Olsun önemli değil. Yapmanız gereken şey şu; eşitliğin her iki yanının türevini alın.

Alalım.

$3x^2 \cdot f'(x^3-4)=6x^2+6$

Bileşke fonksiyonun türevini alırken içinin türeviyle çarpmayı unutmayın. Unutursanız bir şeylerin yanlış olduğunu anlamanız çok da uzun sürmez zaten☺

Gelelim bizden neyin istendiğine. İstenen f '(4). Bunun için x e kaç vermek lâzım. önce bunu bulun.

Evet, x = 2 için $3\cdot 2^2\cdot f'(2^3-4)=6\cdot 2^2+6$

Bu eşitlikten de $f'(4)=\dfrac{5}{2}$ yi bulmuşsunuzdur artık.

13. $f(2x+1)=4x^3+2x-5$

olduğuna göre, f'(3) kaçtır?

1. $f(5-2x)=6x^2$

olduğuna göre, f'(1) kaçtır?

2. $f(x^3+1)=x^3+12x^2+3$

olduğuna göre, f'(9) kaçtır?

3. $f(x^3+1)=x^4+4x+4$

olduğuna göre, f'(2) kaçtır?

4. $f(3x+1)=2x^3+6x^2-3x+1$

olduğuna göre, f(1) + f '(4) toplamı kaçtır?

5. $f\left(\dfrac{x-5}{x-2}\right)=x^3-2x+1$

olduğuna göre, f '(–2) değeri kaçtır?

6. $f(x)=(x^2+x)\cdot g(2x)$

olmak üzere, g(2) = g'(2) = 3 olduğuna göre, f '(1) kaçtır?

7. $f(x)=2x^3+1$

$g(x)=x^2-3$

olduğuna göre, (fog)(x) fonksiyonunun türevi nedir?

8. $f(x^3)=(2x^2-1)\cdot g(3x-1)$

olmak üzere, g(5) = g'(5) = 4 olduğuna göre, f '(8) kaçtır?

9. $2f(x+1)-f(3-x)=x^2+10x-9$

olduğuna göre, f '(2) kaçtır?

10. $f(x+3)+f(3x-1)=8x+10$

olduğuna göre, f '(5) kaçtır?

11. 2 noktasında türevlenebilen bir f fonksiyonu için

$$3f(x)+f(4-x)=2x^3-4x$$

olduğuna göre, $f'(2)$ **değeri kaçtır?**

12. **Gerçek sayılar kümesi üzerinde, tanımlı ve türevlenebilir bir f fonksiyonu için** $f(0)=f'(0)=4$ **olduğuna göre,**

$$g(x+5)=f(x \cdot f(x))$$

ile tanımlanan g fonksiyonu için $g'(5)$ **kaçtır?**

$f(x)=[g(x)]^n$ ise $f'(x)=n\cdot[g(x)]^{n-1}\cdot g'(x)$

Evet, üs başa geliyor ve bir azalıyor. Bir de içinin türeviyle çarpılıyor.
Bir örnek yapalım.

Örnek Soru

$$f(x)=\left(x^2+x+1\right)^4$$

olduğuna göre, $f'(1)$ **kaçtır?**

Çözelim☺
Üs başa gelecek ve bir azalacak. Ama...
İçinin türeviyle çarpmayı unutmuyoruz tabii ki.
Dediklerimi yazayım.

$$f'(x)=4\left(x^2+x+1\right)^{4-1}(2x+1)$$

Şimdi x yerine 1 yazın bakalım $f'(1)=324$ ü bulabilecek misiniz?

13. $y=(2x-1)^4$ ise $y'=$

14. $y=\left(x^2-x\right)^3$ ise $y'=$

15. $y=\left(x^2-2x+3\right)^5$ ise $y'=$

1. $y=\left(3x^2-1\right)^{-2}$ ise $y'=$

2. $y=(4x+3)^{\frac{2}{3}}$ ise $y'=$

3. $y=\dfrac{2}{(2x-5)^3}$ ise $y'=$

4. $y=\dfrac{-3}{\left(x^2+x\right)^2}$ ise $y'=$

5. $y=\sqrt{x+1}$ **ise** y' **nedir?**

6. $y=\sqrt{3x-2}$ **ise** y' **nedir?**

7. $y=x\cdot\sqrt{x+1}$ **ise** y' **nedir?**

8. $y=\dfrac{\sqrt{x+1}}{x^2+1}$ **ise x = 0 için** y' **kaça eşittir?**

9. $y=\sqrt{x^2+x+1}$ **ise** y' **nedir?**

10. $y=\sqrt{x^3-2x}$ **ise** y' **nedir?**

11. $y=\frac{3}{\sqrt[4]{2x+1}}$ ise y ' nedir?

12. $f(x)=\sqrt[3]{x^2+4}$

olduğuna göre, f '(2) kaçtır?

13. $f(x)=\frac{\sqrt{x+3}}{x+1}$

olduğuna göre, f '(1) kaçtır?

14. y = f(x) olmak üzere,

$\sqrt{x}+\sqrt{y}=4$

olduğuna göre, f '(1) kaçtır?

15. y = f(x) olmak üzere,

$\sqrt[3]{y}=2x+1$

olduğuna göre, f '(1) kaçtır?

16. $f(x)=\left(x^2+3x\right)\cdot\sqrt{x^2+3}$

olduğuna göre, $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=1}$ değeri kaçtır?

17. $f(x)=\left(1+\left(1+x^3\right)^3\right)^4$

olduğuna göre, f '(1) kaçtır?

18. $f(x)=\left(1+\left(2+x^2\right)^2\right)^3$

olduğuna göre, f '(1) kaçtır?

Ters Fonksiyonun Türevi

Genellikle bir fonksiyonun tersinin türeviyle ilgili soruların çoğunda fonksiyonun tersi alınmaz.
Ama tersi alınarak çözülen sorularda yok değil.

Ters fonksiyonun türevini bileşke fonksiyonun türevi ve $f(a)=b$ ise $f^{-1}(b)=a$ bilgisi ışığında çözebilirsiniz. Şöyle ki

Örnek Soru

$f\left(x^2+2x\right)=2x-1$

olduğuna göre, $\left(f^{-1}\right)'(3)$ değeri kaçtır?

Çözelim☺

Şimdi gidip f yi bul. Sonra tersini al. Sonra da türevini al ve tersinin türevinde x eşittir bilmem kaç için işlem yap. Epey bi zahmetli işe benziyor. Aslında benzemiyor. Öyle.
Ya da şöyle yapın.

$f\left(x^2+2x\right)=2x-1$ ise $f^{-1}(2x-1)=x^2+2x$ tir.

Şimdi her iki yanın türevini alın bakalım. (Bu arada içinin türeviyle çarpmayı unutmayın i mi?)

$2\cdot\left(f^{-1}\right)'(2x-1)=2x+2$ yi elde ettiniz mi?

Şimdi x e kaç verirseniz $\left(f^{-1}\right)'(3)$ ü elde edeceğinizi bulun.

Evet. x = 2 için $2\cdot\left(f^{-1}\right)'(3)=2.2+2$ dan

$\left(f^{-1}\right)'(3)=3$ olduğunu bulursunuz artık.☺

Ama dediğim gibi. Eğer fonksiyonun tersini bulabilirseniz onun türevini alarak da yapabilirsiniz.
Tercih sizin.

1. $f(4x-1)=2x+5$

olduğuna göre, $\left(f^{-1}\right)'(7)$ değeri kaçtır?

2. $f(x^2+x)=3x-1$

olduğuna göre, $\left(f^{-1}\right)'(5)$ değeri kaçtır?

3. $f(x^3+4x)=x^3-2$

olduğuna göre, $\left(f^{-1}\right)'(-1)$ değeri kaçtır?

4. $f\left(\frac{5x+3}{3x-2}\right)=4x-1$

olduğuna göre, $\left(f^{-1}\right)'(3)$ değeri kaçtır?

Fakat aklınızda olsun. Fonksiyonun tersini kolaylıkla alabiliyorsanız önce tersini bulun. Sonra türev alın ve öyle çözün. Mesela şunlar öyle☺

5. $f(x)=\sqrt{x-4}$

olduğuna göre, $\left(f^{-1}\right)'(2)$ **değeri kaçtır?**

6. $f(x)=\sqrt[3]{\frac{x-1}{2}}$

olduğuna göre, $\left(f^{-1}\right)'(4)$ **değeri kaçtır?**

7. $f(x)=\frac{3x+5}{2x-4}$

olduğuna göre, $\left(f^{-1}\right)'(2)$ **değeri kaçtır?**

8. $f:[2,\infty)\rightarrow[3,\infty)$

$f(x)=2x^2-8x+11$

olduğuna göre, $\left(f^{-1}\right)'(5)$ **değeri kaçtır?**

Türevde Zincir Kuralı

y = f(u), u = g(v), v = h(x) yani, y, u ya, u v ye, v de x e bağlı olsun. Bu durumda

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dv}\cdot\frac{dv}{dx}$$

olarak yazılabilir ki bu eşitliğe **zincir kuralı ile türev alma** denir.

Yani, y nin u ya göre, u nun v ye göre, v nin de x e göre türevini alıyorsunuz ve çarpıyorsunuz.

Örnek Soru

$y=u^3+2u$

$u=t^2-3t$

$t=2x-1$

olduğuna göre, $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=1}$ **değeri kaçtır?**

Çözelim☺

Soruda y u ya, u t ye ve t de x e bağlı verilmiş. Yani zincirin halkaları gibi birbirine bağlı bunlar.

$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}$ olduğunu düşünürseniz yapmanız gereken şey belli aslında.

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}=\left(3u^2+2\right)\cdot(2t-3)\cdot 2$$

İyi de bundan sonra?

x = 1 için t = 2.1 – 1 = 1 ve $u=1^2-3.1=-2$ dir.

Bu değerleri yerlerine yazarak sonucu – 28 bulursunuz.artık.☺

9. $y=u^2+u$

$u=(x-2)^3+(x+1)^2$

olduğuna göre, $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=1}$ **değeri kaçtır?**

1. $y=(4u+1)^3$

$u=(x-1)^3+x+2$

olduğuna göre, $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=0}$ **değeri kaçtır?**

2. $y=4u^3-6u+3$

$u=(x-1)^3+(x+1)^2$

olduğuna göre, $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=0}$ **değeri kaçtır?**

3. $y=u^3+u$

$u=t^2+2t-1$

$t=x^2+x+1$

olduğuna göre $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=0}$ **değeri kaçtır?**

4. $y=(u+1)^3+2u^2-3$

$u=4t^2-2$

$t=x^2-x-1$

olduğuna göre $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=1}$ **değeri kaçtır?**

5. $y=t^3+2t^2+t+1$

$t=u^2+u+1$

$u=x^2+x+1$

olduğuna göre $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=-1}$ **değeri kaçtır?**

Parametrik Fonksiyonların türevi

Göreceksiniz. Bazı sorularda y = f(x) fonksiyonunun x e bağlı olarak değil de; atıyorum $x=2t^3+t$, $y=t^2-t+1$ gibi hem x hem de y t ye bağlı olarak verilmiş olacak. İşte bunun gibi hem x in hem y nin t gibi bir parametreye (bu arada parametre = değişken demek oluyor.) bağlı olduğu denklemlerde türev alma yöntemi biraz daha farklı. Ama çok çok kolay.

y = f(t), x = g(t) biçiminde verilen parametrik fonksiyonda y nin x e göre türevi zincir kuralı yardımıyla bulunan $\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$ dir.

Yani, y nin t ye göre türevi bölü x in t ye göre türevi. Tabii ben parametreye t dedim ama başka bir harf de olabilir.

Örnek Soru

$y = t^3 + 3t$

$x = t^2 - t$

olduğuna göre, $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=1}$ **değeri kaçtır?**

Çözelim☺

Soruda hem y hem de x t ye bağlı verilmiş ve $\frac{dy}{dx}$ sorulmuş. Dolayısıyla bu parametrik fonksiyon dediğimiz fonksiyonun türevi.

Az önce dedim. Bu da $\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{3t^2+3}{2t-1}$ dir.

Ve t = 1 için sonuç 6 dır.
Anlaşıldı mı ki?

6. $y = 2t^3 + 4t$

$x = t^2 + 2t$

olduğuna göre, $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=1}$ **değeri kaçtır?**

7. $y = 3t^2 + 6t - 2$

$x = 5t - 2$

olduğuna göre, $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=3}$ **değeri kaçtır?**

8. $y = at^2 + 4t + 1$

$x = 3t + 1$

olmak üzere, $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=7}$ **değeri 8 e eşit olduğuna göre, a kaçtır?**

9. $y = 6t + 2\sqrt{t}$

$x = 2t^2 - 3t$

olduğuna göre, $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=1}$ **değeri kaçtır?**

10. y = f(x) olmak üzere,

$y = t^2 + \sqrt{2t+1}$

$x = 3t - 1$

olduğuna göre, f '(11) değeri kaçtır?

11. y = f(x) olmak üzere,

$y = 4t^2 + \frac{1}{t}$

$x = 2t^3 - 1$

olduğuna göre, f '(15) değeri kaçtır?

Kapalı Fonksiyonların Türevi

Size kapalı fonksiyonun ne olduğunu izah etmeden önce birkaç tane kapalı fonksiyon yazayım da öyle başlayayım.

$3x - 2y + 4xy + 1 = 0$, $2x^2 + 5x - 2xy + y = 0$,

$(x-2)^2 + (y+3)^2 - 9 = 0$ gibi x ve y nin iç içe olduğu fonksiyonlar kapalı fonksiyondur. Bunların çoğunda y yalnız bırakılarak x e göre türev alınamaz veya alınmaz.

İşte bunlar gibi x e göre çözülemeyen ama y = f(x) fonksiyonu olduğu bilinen x li y li denklemle gösterilen fonksiyonlara **kapalı fonksiyonlar** denir.

Ama unutmayın. y yi yalnız bırakabildiğiniz fonksiyonları kapalı fonksiyon olarak düşünmeden de türev alabilirsiniz.

Kapalı fonksiyonların türevini alırken şu formülcük işe yarıyor.☺ Onun için bilmek lâzım.

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\text{x e göre türev}}{\text{y ye göre türev}} = -\frac{F'_x}{F'_y}$$

Formüldeki eksiyi unutmayın. Bu bir. İkincisi de x e göre türev alırken y yi, y ye göre türev alırken de x i sabit sayı kabul edeceksiniz.

Evet. Burası izaha muhtaç. Bir örnek üzerinde izah edeyim.☺

Örnek Soru

y = f(x) olmak üzere,

$x^3y^2 - 4x + 2y - 3xy + 2 = 0$

olduğuna göre, $\frac{dy}{dx}$ **in eşiti nedir?**

Çözelim☺

x e göre türev alırken y leri kat sayı gibi düşünün ve öyle türev alın.

Meselâ x^3y^2 nin x e göre türevi $3x^2 \cdot y^2$ dir. (Sadece x^3 ün türevini aldık.)

Aynı şekilde 3xy nin x e göre türevi 3y dir.

y ye göre türev alırken de x leri kat sayı gibi düşüneceksiniz.

Meselâ x^3y^2 nin y ye göre türevi $x^3 \cdot 2y$ dir. (Sadece y^2 nin türevini aldık.)

Yine aynı şekilde 3xy nin y ye göre türevi 3x tir.

Anlaşıldı mı şimdi? Aslında çok da uzatmak istemiyorum. Because bu bir antrenman kitabı.

Neyse...

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{3x^2y^2 - 4 + 0 - 3y + 0}{2x^3y - 0 + 2 - 3x + 0} = -\frac{3x^2y^2 - 3y - 4}{2x^3y - 3x + 2}$$

olarak bulunur.

1. $2xy + 4x - 3y + 1 = 0$

olduğuna göre, $\frac{dy}{dx}$ **nedir?**

2. $5xy - 4x + 3y - 2 = 0$

olduğuna göre, $\frac{dy}{dx}$ **nedir?**

3. y = f(x) olmak üzere,

$5x^2 - 3y^3 + 2xy + 4 = 0$

olduğuna göre, $\frac{dy}{dx}$ **nedir?**

4. y = f(x) olmak üzere,

$2y^2 - 3xy + 4x - 1 = 0$

olduğuna göre, $\frac{dy}{dx}$ **nedir?**

5. $F(x,y)=3x^2-2xy^3+x+3y-4=0$

fonksiyonunun türevi nedir?

6. y = f(x) olmak üzere,

$2x^2y-y^2+5xy-4x-2=0$

olduğuna göre, $\frac{dy}{dx}$ in (1,1) için değeri kaçtır?

Ama fonksiyonun bir noktadaki türevi sorulduğunda sadece x i verirlerse verilen fonksiyonda x i yerine yazıp y yi de bulmak lâzım. Aklınızda olsun.

7. y = f(x) olmak üzere,

$y>0$

$x^2+y^2=25$

olduğuna göre, f '(4) değeri kaçtır?

8. y > 0 olmak üzere,

denklemi $x^2+y^2=25$ olan eğrinin apsisi −4 olan noktadaki türevinin değeri kaçtır?

9. y = f(x) olmak üzere,

$y<0$

$(x-2)^2+(y-3)^2=25$

olduğuna göre, f '(5) değeri kaçtır?

10. y = f(x) olmak üzere,

$\sqrt{x-1}+\sqrt{y-2}=2$

olduğuna göre, f '(2) değeri kaçtır?

11. y = f(x) olmak üzere,

$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=1$

olduğuna göre, f '(2) kaçtır?

12. y = f(x) olmak üzere,

$\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{1}{\sqrt{y}}=1$

olduğuna göre, f '(4) kaçtır?

Trigonometrik Fonksiyonların Türevi

$y=\sin x$ ise $y'=\cos x$

$y=\cos x$ ise $y'=-\sin x$

$y=\tan x$ ise $y'=1+\tan^2 x=\frac{1}{\cos^2 x}$

$y=\cot x$ ise $y'=-\left(1+\cot^2 x\right)=-\frac{1}{\sin^2 x}$

Hatta bileşke fonksiyonun türevinden yaralanarak

$y=\sin g(x)$ ise $y'=g'(x)\cdot\cos g(x)$

$y=\cos g(x)$ ise $y'=-g'(x)\cdot\sin g(x)$

Kısacası sin in türevi cos, cos un ki − sin dir. Ama içinin türeviyle çarpmayı unutmayın.

$y=\tan g(x)$ ise $y'=g'(x)\cdot\left(1+\tan^2 g(x)\right)$

$=\frac{g'(x)}{\cos^2 g(x)}$

$y=\cot g(x)$ ise $y'=-\,g'(x)\cdot\left(1+\cot^2 g(x)\right)$

$=\frac{-g'(x)}{\sin^2 g(x)}$

Tan ın türevi bir artı tan kare, cot un ki eksi parantezinde bir artı cot kare. Ama neyi unutmuyoruz? İçinin türeviyle çarpmayı. (Şimdi kalkıp "İçi neresi?" diye sormazsınız herhalde☺
Aslında yine de bunların çok sevimli durmadıklarını biliyorum. Ama bunları türev ala ala hallettiğinizi göreceksiniz. Yeter ki her birinin türevini alırken kuralının ne olduğunu hatırlamaya çalışın ve tecrübeye güvenin.☺

Aşağıdaki örnekçiklerde verilen fonksiyonların türevini alarak başlayın bakalım.

1. $f(x)=\sin x+\cos x$

2. $f(x)=\tan x-\cot x$

3. $f(x)=x^3-3\cos x$

4. $f(x)=x\cdot\sin x$

5. $f(x)=-x+\tan x$

6. $f(x)=\frac{\sin x}{x}$

7. $f(x)=\frac{x^2}{\cos x}$

8. $f(x)=\tan 4x$

9. $f(x)=\cos(3x+1)$

10. $f(x)=\sin(4x+2)$

11. $f(x)=\cot\left(x^2-5x\right)$

12. $f(x)=\cos(3-5x)$

13. $f(x)=\tan(2x-1)$

14. $f(x)=\cot\left(x^2+2\right)$

15. $f(x)=\sin(1+\cos x)$

16. $f(x)=\cos^2 x-\sin^2 x$

17. $f(x)=\cos^2 2x-\sin^2 2x$

18. $\frac{d}{dx}\left(\sin^2 4x-\cos^2 4x\right)$

19. $\frac{d}{dx}(\sin x\cos x)$

20. $\frac{d}{dx}(\sin 4x\cos x+\cos 4x\sin x)$

21. $\frac{d}{dx}(\cos 2x\cos x-\sin 2x\sin x)$

22. $f(x)=\sin^2 x$

23. $f(x)=(1+\sin 2x)^2$

24. $f(x)=\cos^3 x$

Türev almaya devam bakalım. Biliyorsunuz türev alma kuralları türev ala ala öğreniliyor☺

1. $f(x)=\cos^5(2x+3)$

2. $f(x)=\sin^2(2x-1)$

3. $f(x)=\sqrt{\sin x}$

4. $f(x)=\sec x$

5. $f(x)=\operatorname{cosec} x$

6. $f(x)=\tan^2 x$

7. $\frac{d}{dx}\left(\sin^2 4x\right)$

8. $f(x)=2\tan x$

fonksiyonunun $x=\frac{\pi}{3}$ noktasındaki türevi kaçtır?

9. $0<x<\frac{\pi}{2}$ **olmak üzere,**

$f(\tan x)=2\cos x$

olduğuna göre, f '(1) kaçtır?

10. $f(x)=\sin 5x\cdot\cos 3x+\cos 5x\cdot\sin 3x$

olduğuna göre, $f'\left(\frac{\pi}{4}\right)$ **değeri kaçtır?**

11. $f(x)=\frac{2\tan 3x}{1-\tan^2 3x}$

olduğuna göre, $f'\left(\frac{\pi}{24}\right)$ **değeri kaçtır?**

12. $f\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)=\tan x$

olduğuna göre, $f'\left(\frac{\pi}{6}\right)$ değeri kaçtır?

13. $3f\left(\frac{\pi}{2}-x\right)+f\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=\tan x$

olduğuna göre, $f'\left(\frac{\pi}{3}\right)$ değeri kaçtır?

14. $y = f(x)$ olmak üzere,

$y=\cos 2\theta$

$x=\tan\theta$

olduğuna göre, $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{\theta=\frac{\pi}{4}}$ değeri kaçtır?

15. $y = f(x)$ olmak üzere,

$y=\sin^2\theta$

$x=\cos 4\theta$

olduğuna göre, $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{\theta=\frac{\pi}{8}}$ değeri kaçtır?

16. $y = f(x)$ olmak üzere,

$y=2+\sin^2\theta$

$x=\cos 2\theta$

olduğuna göre, $\frac{dy}{dx}$ in $x=\frac{1}{2}$ için değeri kaçtır?

17. $y=1+\cos^2 2\theta$

$x=\sin 2\theta$

olduğuna göre, $\frac{dy}{dx}$ in $x=\frac{1}{2}$ için değeri kaçtır?

18. $f(2x)=(\tan x+\cot x)^3$

olduğuna göre, $f'\left(\frac{\pi}{2}\right)$ değeri kaçtır?

19. $f(1-\sin x)=\cos^3 x$

olduğuna göre, $f'\left(\frac{1}{2}\right)$ değeri kaçtır?

Ters Trigonometrik Fonksiyonların Türevi

Ters trigonometrik fonksiyonların türevinin nereden geldiğini çok merak etmediğinizi biliyorum. Onun için ispata gerek yok. Yanılıyor muyum?

Bir kez daha anlamış olmanız lazım. Trigonometri acayip önemliymiş demek ki.☺
Ters trigonometrik fonksiyonların türevinin formülleri şunlar:☺

$y=\arcsin x$ ise $y'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$y=\arccos x$ ise $y'=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

Görmüş olmanız lâzım. arcsinx ve arccosx in türevleri aynı sadece arccosx in başında eksi var.

$y=\arctan x$ ise $y'=\frac{1}{1+x^2}$

$y=\text{arccot}\, x$ ise $y'=-\frac{1}{1+x^2}$

Burada da şuna dikkat edin. arctanx ve arccotx in türevleri aynı sadece arccotx in başında eksi var. Zaten cos ve cot un türevlerinde başında arc ı olsun olmasın hep eksi olur.☺

Yine bileşke fonksiyonun türevinden yaralanarak

$y=\arcsin(g(x))$ ise $y'=\frac{g'(x)}{\sqrt{1-[g(x)]^2}}$

$y=\arccos(g(x))$ ise $y'=-\frac{g'(x)}{\sqrt{1-[g(x)]^2}}$

$y=\arctan(g(x))$ ise $y'=\frac{g'(x)}{1+[g(x)]^2}$

$y=\text{arccot}(g(x))$ ise $y'=-\frac{g'(x)}{1+[g(x)]^2}$

Bunlara bakmayın öyle tuhaf tuhaf.
Bunları da bilmeniz lâzım. Yoksa bunlarla ilgili gelebilecek integral sorularında yamulursunuz walla!☺ Tabii ki türev sorularında da.

Neyse... Takmayın!

Aşağıda verdiğim ters trigonometrik fonksiyonların türevlerini aldığınızda bu işi de halletmiş olursunuz herhalde. Yapın bakalım☺

1. $f(x)=\arcsin(x+1)$

2. $f(x)=\arccos 2x$

3. $f(x)=\arctan x^2$

4. $\frac{d}{dx}\left(\arctan\sqrt{x}\right)$

5. $f(x)=\arctan(2x-1)$

6. $f(x)=\arctan(x+2)$

7. $f(x)=\arctan\left(\frac{x}{2}\right)$

8. $f(x)=\text{arc}\cot\left(\frac{2}{x}\right)$

9. $f(x)=\text{arc}\cos(1-x)$

10. $f(x)=\arcsin\left(\frac{x}{x+1}\right)$ ise $f'(0)$ kaçtır?

11. $f(x)=\arccos(2x-1)$

12. $f(x)=\arccos\left(x^2+1\right)$

13. $f(x)=\text{arc}\tan\left(2\sqrt{x}\right)$

14. $f(x)=\arctan(\cot x)$

15. $f(x)=\arccos(\sin x)$

16. $\frac{d}{dx}\left(x^2\cdot\arcsin x\right)$

ifadesinin $x=\frac{1}{2}$ için değeri kaçtır?

17. $\sqrt{1-x^2}\cdot\frac{d}{dx}(\arccos x)$

18. $f(x)=\frac{\arctan x}{\sqrt{x}}$ **ise $f'(1)$ kaçtır?**

1. $f(x)=\text{arc}\tan(3x-1)$

olduğuna göre, $f'(1)$ değeri kaçtır?

2. $0<y<\frac{\pi}{2}$ olmak üzere,

$f(x)=\arccos\left(\frac{x}{x^2+1}\right)$

olduğuna göre, $\frac{dy}{dx}$ in $x=0$ için değeri kaçtır?

3. $f(x)=\arctan\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$

olduğuna göre, $f'(2)$ değeri kaçtır?

4. $f(x)=\text{arc}\tan(\cos x)$

olduğuna göre, $f'\left(\frac{\pi}{6}\right)$ değeri kaçtır?

5. $f(x)=\sqrt{1-x^2}\cdot\text{arc}\sin x$

olduğuna göre $\left.\frac{df}{dx}\right|_{x=0}$ değeri kaçtır?

6. $y=f(x)$ olmak üzere,

$y=\arctan t$

$x=2t^2-t$

olduğuna göre, $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=1}$ değeri kaçtır?

7. $y=f(x)$ olmak üzere,

$y=\arcsin\left(\frac{t}{2}\right)$

$x=t^2-t$

olduğuna göre, $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=1}$ değeri kaçtır?

8. $f(x)=\frac{d}{dx}(\arcsin x)$

fonksiyonunun en geniş tanım kümesi nedir?

Logaritma Fonksiyonunun Türevi

$y = \log_a x$ ise $y' = \frac{1}{x} \cdot \log_a e$

$y = \ln x$ se $y' = \frac{1}{x}$

Yine bileşke fonksiyonun türevi yardımıyla

$y = \ln[g(x)]$ ise $y' = \frac{g'(x)}{g(x)}$

Logaritmalı fonksiyonların türevini alırken logaritma ile ilgili kuralları bir kez daha hatırlayın bence. Gerçi aklınızdan hiç çıkmadığını biliyorum da...☺
Ama unutmayın. Türev alma kuralları türev ala ala öğrenilir.
Onun için buyurun bakalım.

9. $y = \ln(2x+4)$

10. $y = \ln(x^2+3x)$

11. $y = \ln(x+2) - \ln(x+1)$

12. $y = 2\ln(x-1) + 3\ln(x+2)$

13. $y = \ln(\sin x)$

14. $y = \ln(\tan x)$

15. $y = \ln(\ln x)$

16. $y = \log_2(4x-1)$

17. $y = \log_3(\sin x)$

18. $y = \log_2(x^2+2x)$

19. $y = (\ln x)^3$

20. $y = (x+\ln x)^2$

1. $y = \frac{1}{\ln x}$

2. $y = \frac{\ln x}{x}$

3. $y = \frac{x^2}{\ln x}$

4. $y = \ln x^5$

5. $y = \ln\left(\sqrt[3]{2x-1}\right)$

6. $y = \ln\sqrt[4]{\cos^3 x}$

7. $y = \ln\left(\frac{x+3}{2x-1}\right)$

8. $y = x^2 . \ln\sqrt{x}$

9. $\frac{d}{dx}(x.\ln x^3)$

10. $y = \ln\left(\frac{\ln x}{x^2}\right)$

11. $\frac{d}{dx}(\cos(\ln x))$

12. $\frac{d}{dx}(\arctan(\ln x))$

13. $y = f(x)$ olmak üzere,

$2\ln x - 3\ln y + xy - 1 = 0$

olduğuna göre, $\frac{dy}{dx}$ nedir?

14. $f(x) = \ln\left(\frac{3x+2}{4}\right)$

olduğuna göre, $f'(2)$ **kaçtır?**

15. $y = f(x)$ olmak üzere,

$y = t^2 + t$

$x = \ln t$

olduğuna göre, $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=0}$ **değeri kaçtır?**

16. $\frac{d}{dx}\left(\sqrt{3+\ln x}\right)$

ifadesinin x = e için değeri kaçtır?

17. $f(\ln x) = 2x + 5$

olduğuna göre, f '(1) değeri kaçtır?

18. $f(1+2\ln x) = 3x^2 + 2$

olduğuna göre, f '(3) değeri kaçtır?

19. $y = e^x - 2$

olduğuna göre, $\left(f^{-1}\right)'(1)$ **değeri kaçtır?**

20. $f(x) = \frac{e^x + 2}{3}$

olduğuna göre, $\left(f^{-1}\right)'(2)$ **değeri kaçtır?**

Üstel Fonksiyonun türevi

Nereden çıktıklarına hiç girmeden formüllerini vereyim.

$y = e^x$ ise $y' = e^x$

$y = e^{g(x)}$ ise $y' = g'(x) \cdot e^{g(x)}$

$y = a^{g(x)}$ ise $y' = g'(x) \cdot a^{g(x)} \cdot \ln a$

Evet. e^x in türevi kendisi. Eğer x yerine bir şeyler gelirse gelen şeyin türeviyle çarpılıyor.

Örneğin,

$y = e^{x^2+\sin x}$ in türevi $e^{x^2+\sin x}$ çarpı üssün türevidir☺

Yani $y' = (2x + \cos x)e^{x^2+\sin x}$ tir.

Buna göre aşağıdaki antrenmanlara dalın bakalım.

1. $y = e^x - e^{-x}$

2. $y = e^{3x}$

3. $y = e^{2x-3}$

4. $y = e^{\sin x} - 2x + 1$

5. $y = e^{\sqrt{x}}$

6. $y = 2e^{\sqrt{x}} + x$

7. $y = e^{x^2+2x-1}$

8. $\frac{d}{dx}\left(x \cdot e^{2x+1}\right)$

9. $y = e^{\tan x}$

10. $y = e^{\arctan x}$

11. $y = e^{x^2+3x-1}$

12. $y = \frac{3}{e^{2x}}$

13. $y = x^2 e^x$

14. $y = e^x\left(x^2 + 2x - 2\right)$

15. $y = e^{\sin^2 x}$

16. $y = e^x \tan x$

17. $y = \dfrac{e^x}{x+1}$

18. $y = \sqrt{e^x + 1}$

19. $y = \dfrac{e^x}{\ln x}$

20. $y = \arctan e^x$

21. $y = \arcsin\left(e^x - 1\right)$

22. $y = e^x \sin x$

23. $y = e^x \ln x$

24. $y = \dfrac{x^2}{e^x}$

25. $y = e^{\left(e^x\right)}$

26. $y = \ln\left(x + e^x\right)$

27. $y = \cos\left(e^x + 1\right)$

28. $y = \tan\left(e^{2x}\right)$

29. $y = \ln\left(3^{\sin 4x}\right)$

30. $y = \ln\left(e^{2x} + \sin^2 x\right)$

1. $e^{-x} \dfrac{d}{dx}\left(e^x \cdot x^3\right)$

ifadesinin değeri nedir?

2. $e^{-x} \dfrac{d}{dx}\left(e^x \cdot \cos x\right)$

ifadesinin değeri nedir?

3. $x = 1$ için,

$e^{-x} \dfrac{d}{dx}\left[e^x \cdot \left(x^2 + x\right)\right]$ **ifadesinin değeri kaçtır?**

4. $f\left(e^x\right) = x^2 + x + 1$

olduğuna göre, f '(1) değeri kaçtır?

5. $f(3x-1) = 6e^x + 5$

olduğuna göre, f '(2) değeri kaçtır?

6. $f(x) = \ln\left(\dfrac{x-1}{2}\right)$

olduğuna göre, $\left(f^{-1}\right)'(\ln 4)$ **değeri kaçtır?**

7. y = f(x) olmak üzere,

$y = e^t + 2t$

$x = 2t + 1$

olduğuna göre, $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{t=\ln 2}$ **değeri kaçtır?**

8. $y = e^{3t-1}$

$x = \ln(3t - 2)$

olduğuna göre, $\dfrac{dy}{dx}$ **in x = ln4 için değeri kaçtır?**

9. $y = u^2 + u$

$u = e^x + x$

olduğuna göre, $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{u=e+1}$ **değeri kaçtır?**

10. $f\left(e^{2x}\right) = 6x + 1$

olduğuna göre, f '(1) değeri kaçtır?

11. $f(x) = e^{\sqrt{4x-3}}$

olduğuna göre, f'(1) değeri kaçtır?

12. $f(x) = e^{\sin^2 2x}$

olduğuna göre, $f'\left(\frac{\pi}{4}\right)$ **değeri kaçtır?**

13. $f(x) = \ln\left(e^x + e^{-x}\right)$

olduğuna göre, $f'(0)$ **değeri kaçtır?**

14. $f(x) = \sin\left(e^x + 3x\right)$

olduğuna göre, $f'(0)$ **değeri kaçtır?**

Başarının sırlarından biri, geçici başarısızlıkların bizi yenmesine izin vermemektir.
Mark Kay

Yapabildiğimiz her şeyi yapsaydık, buna kendimiz bile şaşardık.
Thomas Edison

Yüksek mertebeden Türev

İsmi korkutmasın sizi. Yeni bir şey yok burada. Peş peşe türev alacaksınız sadece.

$y = f(x)$ fonksiyonu için

$y' = \frac{dy}{dx} = f'(x)$ birinci türev

$y'' = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d^2y}{dx^2} = f''(x)$ ikinci türev

$y''' = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) = \frac{d^3y}{dx^3} = f'''(x)$ üçüncü türev

Gösterimi bu şekilde. Artık bundan sonra $\frac{d^{61}y}{dx^{61}}$ ifadesinin x e göre 61. türev olduğunu anlarsınız di mi?

Örnek Soru

$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + 2$ fonksiyonu için,

f "(1) = f '(1) = 8 olduğuna göre, b kaçtır?

Çözelim☺

f(x) in birinci ve ikinci türevlerinde x = 1 için sonuç 8 çıkıyormuş.

f(x) in birinci türevi $f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$ ve ikinci türevi f "(x) = 6x + 2a. İlk önce bunları bulun.

Sonra f '(1) = 6.1 + 2a = 8 den a = 1 i sonra da birinci türevden f '(1) = 3 + 2a + b = 8 den b yi 3 bulun.

Anladınız mı bu olayı?

Geçtik☺

1. $f(x) = x^3 + ax^2 - 5$ fonksiyonu için,

f "(1) = 11 olduğuna göre, a kaçtır?

2. $f(x) = x^3 + bx^2 + cx + 2$ fonksiyonu için,

f '(1) = 2

f "(2) = 16

olduğuna göre, b + c toplamı kaçtır?

3. $f(x) = x^3 + bx^2 + cx + d$ olmak üzere,

f(1) = f '(1) = f "(2) = 0

olduğuna göre, b.c.d çarpımı kaçtır?

4. $f(x) = (x-2)^2.(2x+m)$

f "(1) = 12

olduğuna göre, m kaçtır?

5. $e^{-x}\frac{d^2}{dx^2}\left(x^3.e^x\right)$

ifadesinin değeri nedir?

6. $\frac{d^2}{dx^2}\left(\cos^2 x - \sin^2 x\right)$

ifadesinin değeri nedir?

7. $\frac{d^2}{dx^2}\left(\sin^2 4x\right)$

ifadesinin değeri nedir?

8. $f(x) = e^{2x} + 1$

olduğuna göre, f "(ln2) değeri nedir?

9. $f(x) = \sin 6x$

olduğuna göre, $f''\left(\frac{\pi}{12}\right)$ **değeri nedir?**

10. $f(x) = e^{2x+3}$ olmak üzere

$\frac{f'''(x)}{f(x)} = \sqrt{2^n}$

olduğuna göre, n kaçtır?

11. $f(x) = e^{2x-1}$ olmak üzere

$\frac{d^3f}{dx^3} = m \cdot f(x)$

olduğuna göre, m kaçtır?

12. $y = \cos x + \sin x$

olduğuna göre, $\frac{d^{17}y}{dx^{17}}$ **ifadesinin değeri nedir?**

13. $f(x) = x^6 + 2x^3 + 1$

olduğuna göre, $f^{(6)}(x)$ **değeri nedir?**

14. $f(x) = x^{61} + 61x + 1967$

olduğuna göre, $\frac{d^{61}x}{dx^{61}}$ **değeri nedir?**

Hata değil çare bulun

Henry Ford

Türev Uygulamaları

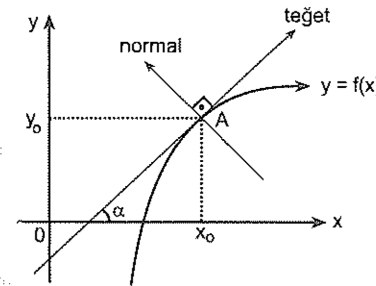
Erişmek istedikleri bir hedefi olmayanlar,
çalışmaktan zevk almazlar.
Emile Raux

Pek çok konuda başarı, başarmanın ne kadar vakit
alacağını bilmeye bağlıdır.
Montesqieu

TÜREV UYGULAMALARI

Türev alma kurallarını yuttuğunuzu biliyorum.☺
Onun için uygulamalarına geçmenizde bir sakınca yok. Ve geçmeniz de lâzım zaten.
En başta şunu söyleyeyim. Burada size türevle ilgili bir sürü yeni bilgi vermiycem. Göreceksiniz zaten.
Ama burada kafayı biraz daha fazla çalıştırmanız gerekebilir. Bu sıkıntı olur mu sizin için? ☺
Burada ilk önce şunu bilmeniz hatta hiç unutmamanız lâzım. **Bir fonksiyonun herhangi bir noktadaki türevi, fonksiyonun grafiğine o noktada çizilen teğetin eğimi demektir.**

Teğet, eğriyi kesmeden ona bir noktada değip geçen doğru demekti. Aranızda bunu bilmeyen yok değil mi?
Burada bir de normal diye bir şey var.
Normal, teğete dik olan doğrudur.
Neyse... Bunları şekille göstereyim.



Gerçi bunları söylerken bir doğrunun eğiminin ne demek olduğunu bildiğinizi kabul ettim. Ama bilmeyenler için eğim olayını açmakta yarar var.
Bir doğrunun eğimi, o doğrunun x ekseninin pozitif tarafıyla yaptığı açının tanjantıdır.

Ve $y = f(x)$ fonksiyonunun grafiğine $x = x_0$ apsisli noktadan çizilen teğetin eğimi $m_t = \tan\alpha$ olmak üzere, $m_t = \tan\alpha = f'(x_0)$ dır.

Yani, bir eğrinin herhangi bir noktadaki teğetinin eğimi, eğrinin bu noktadaki türevine eşittir.

Bu arada analitikten hatırlayın☺
İki doğru paralel ise eğimleri eşittir.

$d_1 // d_2$ ise $m_1 = m_2$

İki doğru dik kesişiyorsa eğimleri çarpımı –1 dir.

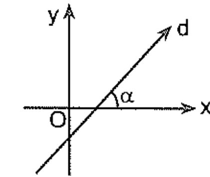
$d_1 \perp d_2$ ise $m_1 \cdot m_2 = -1$

Ayrıca şu çok çok önemli.
Eğimi m olan ve $A(x_0, y_0)$ noktasından geçen doğrunun denklemi

$y - y_0 = m(x - x_0)$

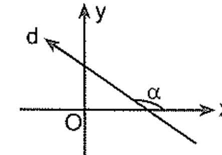
Hatırladınız mı?

Eğim olayını biraz daha açayım mı?
Bir doğrunun eğimi, bu doğrunun x ekseninin pozitif yönüyle yaptığı açının tanjantı idi. Dolayısıyla
x ekseninin pozitif yönüyle dar açı yapan doğruların eğimi pozitiftir.



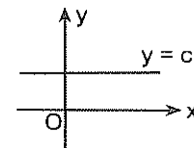
Şekildeki doğrunun eğimi(m) = tan α > 0 dır.

x ekseninin pozitif yönüyle geniş açı yapan doğruların eğimi negatiftir.



Şekildeki doğrunun eğimi (m)= tan α < 0 dır.

Fakat doğru x eksenine paralel ise eğimi sıfırdır.

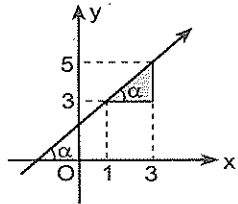


Şekildeki doğrunun eğimi(m) = tan 0° = 0 dır.

Bir doğrunun üzerindeki iki nokta belli ise eğimi bulunabilir.

$A(x_1,y_1)$ ve $B(x_2,y_2)$ noktalarından geçen doğrunun eğimim $m=\tan\alpha=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$ idi.

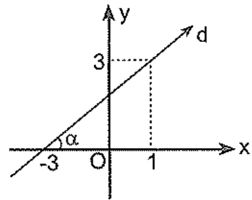
Örneğin



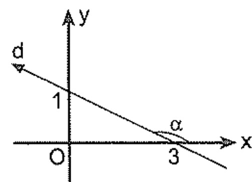
Üstteki doğrunun eğimi $m=\tan\alpha=\frac{5-3}{3-1}=1$ dir.

Zaten $\tan\alpha=\frac{\text{karşı dik kenar}}{\text{komşu dik kenar}}$ değil miydi?

Örneğin,



Şekildeki d doğrusunun eğimi $m=\tan\alpha=\frac{3}{4}$ tür.



Şekildeki d doğrusunun eğimi $m=\tan\alpha=-\frac{1}{3}$ tür.

Denklemi verilen doğrunun eğimi

y = mx + n doğrusunun eğimi m dir. Yani, y yi yalnız bırakırsanız x in kat sayısı eğimi verir.

Örneğin,

$y=3x+2$ doğrusunun eğimi 3,

$y=\frac{-2}{3}x+2$ doğrusunun eğimi $\frac{-2}{3}$,

$2x+3y=6$ denkleminde y yi yalnız bırakırsanız eğimin $\frac{-2}{3}$ olduğunu,

$\frac{x}{2}-\frac{y}{4}=1$ denkleminde y yi yalnız bırakırsanız eğimin 2 olduğunu görürsünüz.

Anladınız mı burayı?

Şimdi gelelim asıl konuya.☺

Bir fonksiyonun herhangi bir noktadaki teğetinin eğimi o noktadaki türeviydi.

Bu kadar hatırlatmadan sonra fonksiyonun x_0 apsisli noktasındaki teğet ve normalinin denklemini yazalım artık☺

y = f(x) fonksiyonuna $A(x_0,y_0)$ noktasından çizilen teğetin denklemi $m_t=f'(x_0)$ yazarsanız

$y-y_0=f'(x_0)\cdot(x-x_0)$ olur. Ayrıca, teğet ve normalin eğimleri çarpımı (birbirine dik iki doğru)

$m_t.m_n=-1$ olduğundan $m_n=\frac{-1}{m_t}=\frac{-1}{f'(x_0)}$ alarak

bu noktadaki normalin denklemini de yazabilirsiniz.

Örnek soru

Denklemi $f(x)=x^3+x^2$ olan eğrinin x = 1 noktasındaki teğetinin denklemi nedir?

Çözelim☺

Teğet denklemi yazmak için bize o noktanın koordinatları ve eğim (o noktadaki türevin değeri) lâzım.

Onun için ilk önce noktanın koordinatlarını bulalım.

x = 1 için $y=1^3+1^2=2$. Demek ki noktanın koordinatları (1,2) imiş.

Teğetin eğimini ise türev yardımıyla bulcaz.

$f'(x)=3x^2+2x$ ve $f'(1)=3.1^2+2.1=5$ olduğundan

eğim = m = 5 tir.

Yani, $(x_0,y_0)=(1,2)$ ve $m_t=5$ tir.

Artık teğetin denklemini yazarsınız☺.

Bu değerleri, $y-y_0=m(x-x_0)$ eşitliğinde yerlerine yazarak y – 2 = 5 (x – 1) ve bunu da düzenleyerek y = 5x – 3 bulun.

Bir fonksiyonun herhangi bir noktadaki teğetinin eğimini bulmak istiyorsanız fonksiyonun türevini alıp verilen x değerini yerine yazmanız yeterli.

Çünkü fonksiyona üzerindeki bir noktadan çizilen teğetin eğimi o noktadaki türeve eşitti.

1. $f(x)=2x^2-3x+1$

eğrisinin x = 1 noktasındaki teğetinin eğimi kaçtır?

2. $f(x)=\frac{3x^2}{2}-5x+1$

eğrisinin x = a noktasındaki teğetinin eğimi 4 olduğuna göre, a kaçtır?

3. $f(x)=ax^2-3x-2$

eğrisinin x = 2 apsisli noktasındaki teğeti Ox ekseninin pozitif yönüyle 45° lik açı yaptığına göre, a kaçtır?

4. $f(x)=\frac{x^4}{2}+5x-1$

eğrisinin hangi noktadaki teğetinin eğimi 21 dir?

5. f(x) = ln(4x + 2)

eğrisinin $x=\frac{1}{2}$ apsisli noktadaki teğetini eğimi kaçtır?

Normalin eğimini bulmak için önce teğetin eğimini bulmak lâzımdı. Çünkü $m_t\cdot m_n=-1$ di.

6. f(x) = ln(cosx)

eğrisinin $x=\frac{\pi}{4}$ noktadaki normalinin eğimi kaçtır?

7. $f(x)=\frac{x^3}{3}-3x+1$

eğrisinin x = 2 apsisli noktasındaki teğetinin Ox ekseninin pozitif yönüyle yaptığı açı kaç derecedir?

8. f(x) = arcsinx

eğrisinin $x=\frac{1}{2}$ apsisli noktadaki normalinin eğimi kaçtır?

9. $f(x)=\sin^2 x$

eğrisinin $x=\frac{\pi}{8}$ apsisli noktasındaki teğetinin eğimi kaçtır?

10. $f(x)=\frac{x^2}{x-1}$

eğrisinin x = 3 noktasındaki normalinin eğimi kaçtır?

11. $f(x)=\frac{3}{(x+m)^2}$

eğrisinin x = 2 noktasındaki normalinin eğimi $\frac{1}{6}$ olduğuna göre, m kaçtır?

Teğetin eğimi için kapalı fonksiyon türevi almanız gerekiyorsa hem x hem de y yi bilmeniz lâzım. onun için sadece x i verirlerse denklemde yerine yazıp y yi de bulmanız lâzım.

12. y > 0 olmak üzere,

$x^2+y^2=25$

eğrisinin x = 3 noktasındaki normalinin eğimi kaçtır?

13. $\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{1}{\sqrt{y}}=1$

eğrisinin x = 4 noktasındaki teğetinin eğimi kaçtır?

14. f(x) = sin(cos6x)

eğrisinin $x=\frac{\pi}{12}$ noktasındaki normalinin eğimi kaçtır?

15. $x^3+y^2-3xy+1=0$

denklemiyle verilen eğrinin A(1,2) noktasındaki teğetini eğimi kaçtır?

16. $y=2t^2+t$

x= 3t – 2

denklemleriyle verilen y = f(x) eğrisinin t = 2 noktasındaki teğetinin eğimi kaçtır?

Teğetin eğimini bulmayı öğrendiyseniz devam edelim. Gerçi tecrübeyle sabit ki buradaki temel sıkıntı çoğu zaman türevden kaynaklanmıyor. Daha çok analitik geometri ve cebirsel bilgi eksikliğinden kaynaklanıyor. Onun için en azından doğru analitiğindeki eğimle ilgili olan şeyleri hatırlamakta fayda var. Hem de çokk☺

Bir kere şunu unutmayın. Bir fonksiyonda teğetin eğiminden bahsedilmişse bu birinci türevle ilgilidir.

Bir de iki doğru birbirine paralel ise eğimleri eşit, dik kesişiyorsa eğimlerinin çarpımının – 1 olduğu aklınızda olsun.

1. $f(x)=x^2+2x-1$

eğrisinin x = 2 apsisli noktadaki teğeti y = mx + n doğrusuna paralel olduğuna göre m kaçtır?

2. $f(x)=e^x+1$

eğrisinin x = lna apsisli noktadaki teğeti y – 2x + 1 = 0 doğrusuna paralel olduğuna göre a kaçtır?

3. $f(x)=x^2+6x-3$

eğrisinin hangi noktadaki teğeti y = 4x + 1 doğrusuna paraleledir?

4. $f(x)=\frac{x^4}{2}-3x-1$

eğrisinin hangi noktadaki teğeti y = 13x + 3 doğrusuna paraleldir?

Bir kerem verilen nokta fonksiyonun üzerindeyse denklemi sağlaması lâzım.

5. $f(x)=ax^2+3x-2$

fonksiyonunun (1, 3) noktasındaki teğeti y = mx + 2 doğrusuna paralel olduğuna göre, m kaçtır?

6. $f(x)=x^2+2x-1$

$g(x)=\frac{x^3}{3}+bx+5$

fonksiyonlarının x = 2 apsisli noktadaki teğetleri birbirine paralel olduğuna göre, b kaçtır?

7. $f(2x-1)=x^3+ax+3$ veriliyor.

y = f(x) fonksiyonunu x = 3 apsisli noktasındaki teğeti $y=\frac{-1}{3}x+1$ doğrusuna dik olduğuna göre, a kaçtır?

8. $y=\frac{x^3}{|x|}$ **eğrisine x = 1 ve x = – 1 noktalarındaki teğetlerin birbirine göre durumu nedir?**

Aklınızda olsun. x eksenine paralel olan (y = 2, y = 3 gibi) doğruların eğimi sıfırdır.

9. $f(x)=ax^2+6x+c$

fonksiyonu A(1, b) noktasında x eksenine (y = 0 doğrusuna) teğet olduğuna göre, a kaçtır?

Şu üç soruda teknik yardıma ihtiyaç duyabilirsiniz. Ben uzaktayım.☺
Ama isterseniz siz yine de 3.antrenmandaki çözümlü örneği iyice bi anlayıp öyle çözün.☺

10. $f(x)=x^2+6x-m+2$

fonksiyonunun grafiği y = 2 doğrusuna teğet olduğuna göre, m kaçtır?

11. $f(x)=x^2+4x-2$

fonksiyonunun hangi noktadaki teğeti y eksenine diktir?

12. $f(x)=x^3-3x+2$

fonksiyonunun x eksenine paralel teğetlerinin y eksenini kesim noktalarının ordinatları çarpımı kaçtır?

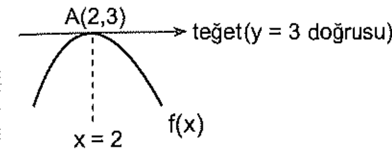
Bir önceki antrenmanda şunu demiştim.
İki doğru paralel ise eğimleri eşitti. Dik kesişiyorsa eğimleri çarpımı –1 idi.
Bir de x eksenine paralel doğruların (teğetlerin) eğimi sıfır idi.
Bunları unutmamak lâzım.
Bu antrenmandaki sorular belki de türevin en zor soruları. Ne yalan söyleyeyim☺
Ama şu çözeceğim örneği iyi anlarsanız burada da sıkıntı yaşamayacaksınız.

Örnek Soru

$f(x)=\frac{x^3}{3}-ax+b$

fonksiyonunun x = 2 noktasındaki teğeti y = 3 doğrusu olduğuna göre, b kaçtır?

Çözelim☺
Size tavsiyem bu tür sorularda aklınızda hep şu şekil olsun.



Her seferinde bunu çizin ve A(2,3) noktasıyla ifade ettiğim noktanın (tabii ki soruya göre değişecek bu nokta) koordinatlarını belirleyin. Sonrası kolay.
Bu şekilde birinci olarak f(2) = 3
İkincisi de f ′(2) = 0 olduğunu görün.
Hemen hemen hepsinde bu grafiğe benzer bir durum olduğunu göreceksiniz.
Artık işlem yapıp b yi $\frac{25}{3}$ olarak bulursunuz.
Buldunuz mu?
Bence bu örneğe bi daha bakın☺ Daha sonra dönüp bakmaktansa...☺

1. $f(x)=\frac{x^3}{6}-bx+c$

fonksiyonunun x = 2 noktasındaki teğeti y = 6 doğrusu olduğuna göre, b + c toplamı kaçtır?

2. $f(x)=x^2+bx+c$

fonksiyonunun grafiği apsisi 1 olan noktada Ox eksenine (y = 0 doğrusuna) teğet olduğuna göre, c kaçtır?

3. $f(x)=x^3+ax+b$

fonksiyonunun grafiği apsisi 2 olan noktada Ox eksenine teğet olduğuna göre, (a,b) nedir?

4. $f(x)=x^3-2x^2+cx+d$

fonksiyonu apsisi 2 olan noktada y = – 6 doğrusuna teğet olduğuna göre, d kaçtır?

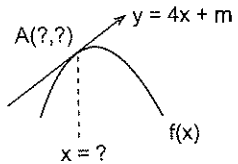
5. $f(x)=x^3+bx^2+cx-2$

eğrisi x = 1 apsisli noktada y = 7 doğrusuna teğet olduğuna göre, b + c toplamı kaçtır?

6. **y = 4x + m doğrusu** $y=\frac{x^4}{4}-4x+1$ **fonksiyonunun grafiğine teğet olduğuna göre, m kaçtır?**

Üstteki soruya dikkat edin. Teğet olan doğrunun denklemi zaten verilmiş. Ve eğimi 4. Peki fonksiyonun hangi noktadaki teğetinin eğimi 4? Ya da şöyle sorayım. Fonksiyonun türevinin 4 e eşit olduğu nokta ne?

Taslak şekil yandaki gibi olabilir meselâ.



7. **y = 3x + 2 doğrusu** $y=\frac{x^4}{4}-5x+k$ **fonksiyonunun grafiğine teğet olduğuna göre, k kaçtır?**

8. **y = 10x + 2 doğrusu** $y=\frac{x^4}{12}+x+k$ **fonksiyonunun grafiğine teğet olduğuna göre, teğet noktasının ordinatı kaçtır?**

Teğet ve normal denklemi bir doğru denklemi olduğundan bu denklemleri yazmak için bize koordinatları belli olan bir nokta (x_0, y_0) ve eğim (m) lâzım. eğimi ve bir noktası belli olan doğru denklemi $y-y_0=m(x-x_0)$ idi.

9. $f(x)=2x^2-3x+1$

fonksiyonuna (1,0) noktasından çizilen teğetin denklemi nedir?

10. $f(x)=\frac{3x^2}{2}-5x+1$

fonksiyonunun x = 2 apsisli noktasındaki teğetinin denklemi nedir?

1. $f(x)=\frac{x^4}{2}-3x$

eğrisinin x = 1 apsisli noktasındaki teğetinin denklemi nedir?

2. $f(x)=\frac{x^3}{3}-x^2+2$

eğrisinin A(3, k) noktasındaki teğetinin denklemi nedir?

3. $f(x)=x^3-x+1$

eğrisinin x = 1 apsisli noktadaki normalinin denklemi nedir?

Unutmayın. Fonksiyon üzerindeki noktalar fonksiyon denklemini sağlar.

4. $f(x)=x^2-bx+2$

eğrisinin A(1, 2) noktasındaki normalinin denklemi nedir?

5. $f(x)=x^2+bx+c$

eğrisinin x = 2 apsisli noktasındaki normalinin denklemi $y=\frac{-1}{2}x+3$ **olduğuna göre, c kaçtır?**

6. $f(x)=e^x$

eğrisinin x = ln3 noktadaki teğetinin denklemi nedir?

7. f(x) = arcsinx

eğrisinin $x=\frac{1}{2}$ **apsisli noktadaki normalinin denklemi nedir?**

8. y > 0 olmak üzere,

$(x-1)^2+(y-2)^2=25$

eğrisinin x = 4 apsisli noktasındaki teğetinin denklemi nedir?

Bir doğrunun x ekseni ve y eksenini kestiği noktalar nasıl bulunuyordu? Hatırlıyor musunuz?
$x = 0$ için y eksenini kesim noktasını, $y = 0$ için de x eksenini kesim noktası bulunuyordu.
Bir kere eksenleri kesim noktasından filan bahsedilmişse ilk önce eksenleri kesim noktası sorulan doğrunun (teğet veya normalin) denkleminin yazılması lâzım. Gerisi dediğim gibi☺

9. $f(x) = x^3 - 2x$

eğrisinin x = 2 noktasındaki teğeti Oy eksenini hangi noktada keser?

10. $f(x) = x^2 + 1$

eğrisinin x = 3 noktasındaki normali Oy eksenini hangi noktada keser?

11. $f(x) = \dfrac{2}{x^2 + 1}$

eğrisinin x = 1 apsisli noktasındaki teğeti Ox eksenini hangi noktada keser?

12. $y > 0$ olmak üzere,

$x^2 + y^2 = 25$

eğrisinin x = 3 apsisli noktasındaki teğeti Ox eksenini hangi noktada keser?

13. $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 4$

eğrisinin x = 4 apsisli noktasındaki teğeti Oy eksenini hangi noktada keser?

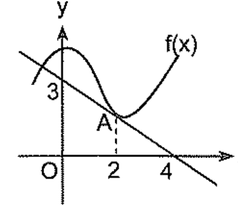
14. $f(x) = \sin(\cos 4x)$

eğrisinin $x = \dfrac{\pi}{8}$ **noktasındaki normali Oy eksenini hangi noktada keser?**

15. $x^4 + y^2 + 2xy - 4 = 0$

eğrisinin A(1,1) noktasındaki teğeti Ox eksenini hangi noktada keser?

Şekilli fonksiyon sorularında genelde bir fonksiyon grafiği ve bir de bu fonksiyonun teğeti verilir. Bu tür sorularda önemli olan teğetin eğimini doğru yazabilmektir. Teğetin eğimini yazabiliyorsanız fonksiyonun teğet noktasındaki türevini de biliyorsunuz demektir. Meselâ aşağıdaki şekilde f fonksiyonu ve bu fonksiyonun A noktasındaki teğetinin grafiğini verdim.



Şekilde f(x) in $x = 2$ apsisli noktadaki teğeti (4,0) ve (0,3) noktalarından geçmiş.

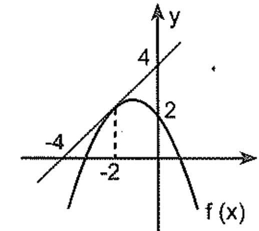
Dolayısıyla eğimi $m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{3-0}{0-4} = \dfrac{-3}{4}$ tür.

Artık bundan da şu sonucu çıkarabilirsiniz.

$f'(2) = m = \dfrac{-3}{4}$ tür. Ve ilginç olan ne biliyor musunuz.

Bu tür soruların türevle ilgili olan tek kısmı da burası☺

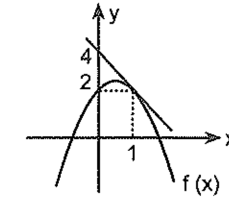
1.



Şekilde $y = f(x)$ fonksiyonunun grafiği ve $x = -2$ apsisli noktasındaki teğeti verilmiştir.

$g(x) = x^3 - 5f(x)$ **olduğuna göre, g'(−2) kaçtır?**

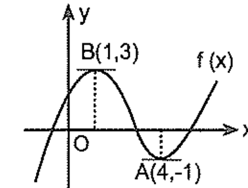
2.



Şekilde $y = f(x)$ fonksiyonunun grafiği ve $x = 1$ apsisli noktasındaki teğeti verilmiştir.

g(x) = x.f(x) olduğuna göre, g'(1) kaçtır?

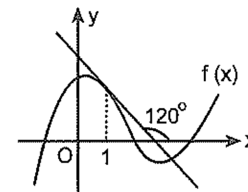
3.



Şekilde $y = f(x)$ fonksiyonunun grafiği ile A(4,-1) ve B(1,3) noktalarındaki teğetleri verilmiştir.

$g(x) = x^2 \cdot f(x)$ **olduğuna göre, g'(1) kaçtır?**

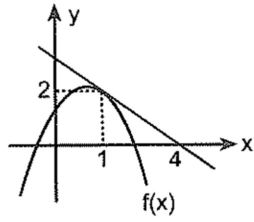
4.



Şekilde $y = f(x)$ fonksiyonunun grafiği ve $x = 1$ apsisli noktasındaki teğeti verilmiştir.

$g(x) = x^3 + f(2x - 1)$ **olduğuna göre, g'(1) kaçtır?**

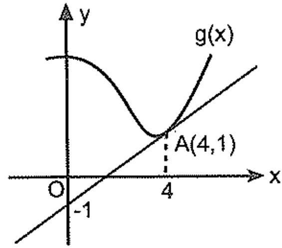
5.



Şekilde y = f(x) fonksiyonunun grafiği ve x = 1 apsisli noktasındaki teğeti verilmiştir.

$g(x) = x^3 + f(x^2)$ **olduğuna göre, g'(1) kaçtır?**

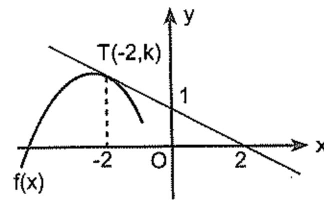
6.



Şekilde g(x) fonksiyonunun grafiği ve A(4,1) noktasındaki teğeti verilmiştir.

$f(x) = \frac{x^3}{12} - 4g(x)$ **olduğuna göre, f '(4) kaçtır?**

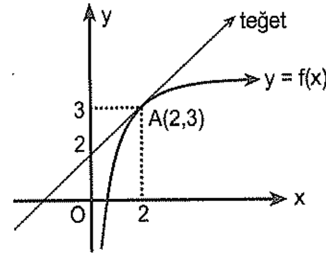
7.



Şekilde y = f(x) fonksiyonunun grafiği ve T(– 2,k) noktasındaki teğeti verilmiştir.

$g(x) = (x^2 + 1)f(x)$ **olduğuna göre, g'(–2) kaçtır?**

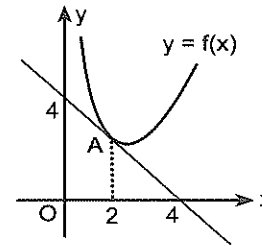
8.



Şekilde y = f(x) fonksiyonunun grafiği ve A(2,3) noktasındaki teğeti verilmiştir.

$g(x) = \frac{f(x)}{x}$ **olduğuna göre, g'(2) kaçtır?**

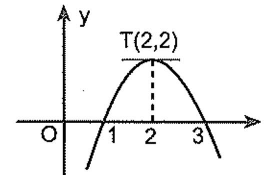
1.



Şekilde y = f(x) fonksiyonunun grafiği ve x = 2 noktasındaki teğeti verilmiştir.

$g(x) = \frac{3x-1}{f(x)}$ **olduğuna göre, g'(2) kaçtır?**

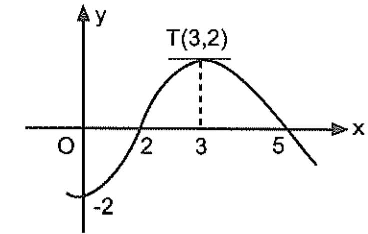
2.



Şekildeki f fonksiyonunun T(2,2) noktasındaki teğeti Ox eksenine paraleldir.

$g(x) = \frac{2f(x)}{x-1}$ **olduğuna göre, g'(2) kaçtır?**

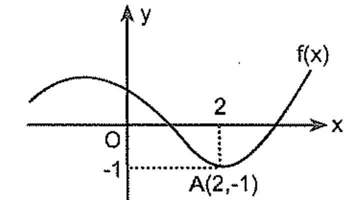
3.



Şekildeki f fonksiyonunun T(3,2) noktasındaki teğeti Ox eksenine paraleldir.

$g(x) = x^2 \cdot f(x)$ **olduğuna göre, g'(3) kaçtır?**

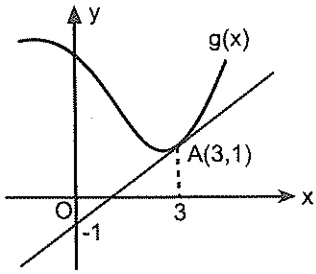
4.



Şekildeki f fonksiyonunun T(2, –1) noktasındaki teğeti Ox eksenine paraleldir.

$g(x) = \ln(x^2 + f(x))$ **olduğuna göre, g'(2) kaçtır?**

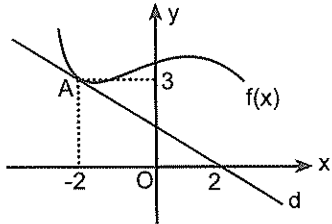
5.



Şekilde g(x) fonksiyonunun grafiği ve A(3,1) noktasındaki teğeti verilmiştir.

$f(x)=\ln(g(x))$ **olduğuna göre, f '(3) kaçtır?**

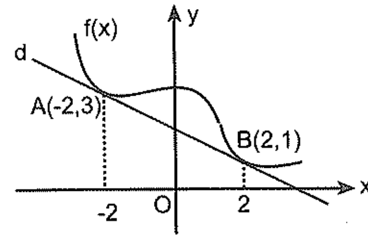
6.



Şekilde f(x) fonksiyonunun grafiği ve A(-2,3) noktasındaki teğeti verilmiştir.

$g(x)=\dfrac{x}{f(x)}$ **olduğuna göre, g '(–2) kaçtır?**

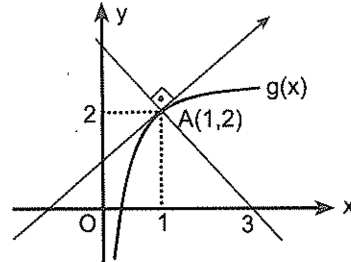
7.



Şekilde f(x) fonksiyonunun grafiği ve A(-2,3) ve B(2,1) noktalarındaki ortak teğeti verilmiştir.

$g(x)=\dfrac{f(x)}{x}$ **olduğuna göre, g'(2) kaçtır?**

8.



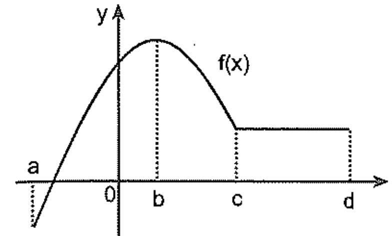
Şekilde g(x) fonksiyonunun grafiği ve A(1,2) noktasındaki teğeti ve normali verilmiştir.

$f(x)=\dfrac{x^2}{g(x)}$ **olduğuna göre, f '(1) kaçtır?**

Artan ve Azalan Fonksiyonlar

Fonksiyonlarda artan azalan olayı önemli. Aslında bir fonksiyonda x in değerleri artırıldığında fonksiyonun aldığı değerlerin arttığını ya da azaldığını grafikte gayet net bir şekilde görebilirsiniz.

Grafik üzerinde izah edeyim.



Şekilde grafiği verilen f fonksiyonu

[a, b] aralığında artıyor (yukarı çıkıyor☺)

[b, c] aralığında azalıyor (aşağı iniyor☺)

[c, d]aralığında sabittir. (düz gidiyor.)

Kısacası, grafiğin sol ucunu bulun ve üzerinde yürümeye başlayın. Yukarı çıkıyorsanız fonksiyon artan, aşağı iniyorsanız azalan, düz gidiyorsanız da sabit. Bu kadar basit işte.☺

İyi de bunun türevle ne ilgisi var?
Öyle değil mi?
(Amma yaptınız ha! Türevle ilgisi olmasa burada niye anlatayım ki?☺)

İzah edeyim.

Şimdi dediklerimi yapın bakalım.

Şekildeki f fonksiyonuna artan olduğu aralıkta teğetler çizin ve bu teğetlerin eğiminin pozitif olduğunu görün.

Gördünüz mü?

Bir de azalan olduğu aralıkta teğetler çizin ve bu teğetlerin eğimlerinin negatif olduğunu görün.

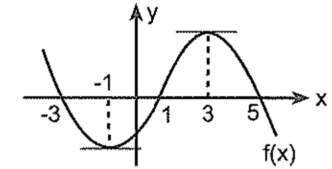
Dedikleri mi yaptınız mı?

Sonra da kendinize şu soruyu sorun.

Fonksiyona çizilen teğetin eğimi ne demekti?

Fonksiyonun bir noktadaki türevi o noktadaki teğetinin eğimi demek değil miydi?
Şimdi bunları yorumlayın bakalım.
Şaka şaka☺
'Bir fonksiyon türevinin (teğetin eğiminin) pozitif olduğu aralıklarda fonksiyon artan, negatif olduğu aralıklarda ise azalandır.

Örneğin



Şekilde grafiği verilen f fonksiyonu

$(-\infty, -1)$ de azalan

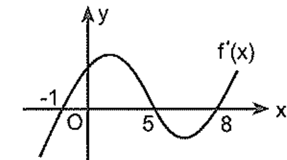
$(-1, 3)$ de artan

$(3, \infty)$ da azalandır.

Burasını anladıysanız geçeyim☺

Peki, fonksiyonun türevinin grafiği verildiğinde artan azalan olduğu aralıklar bulunabilir mi?
Evet, fonksiyonun türevinin grafiğini verir de bu fonksiyonun artan - azalan olduğu aralıkları sorarlarsa bu da kolay☺
Türev grafiğinin x ekseninin üstünde olduğu yerlerde türevi pozitif olduğundan fonksiyon artan, altında olduğu yerlerde ise azalandır.

Örneğin



Şekilde türevinin (f ' nün) grafiği verilen f fonksiyonu

$(-\infty, -1)$ de azalan (Eğri x ekseninin altında)

$(-1, 5)$ te artan (Eğri x ekseninin üstünde)

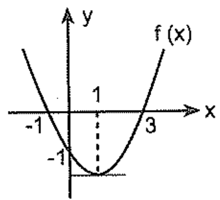
$(5, 8)$ de azalan,

$(8, \infty)$ da artandır.

Bütün bu anlattıklarımı özetleyeyim.
Bir fonksiyonun artan olduğu aralıkta türevi pozitif, azalan olduğu aralıkta ise türevi negatiftir.
Ya da bunu tersten düşünürsek,
Herhangi bir aralıkta bir fonksiyonun türevi pozitif ise fonksiyon bu aralıkta artan, negatif ise azalandır.
O halde denklemi verilen bir fonksiyonun artan veya azalan olduğu aralık sorulmuşsa birinci türevinin işaretini incelemek lâzım. Pozitif olduğu yerlerde artan, negatif olduğu yerlerde azalandır.

Şu da aklınızda olsun. Bir fonksiyonun grafiğindeki tepecik ve çukurcuklarda türevi sıfırdır. Niye ki?

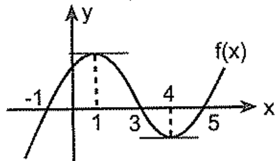
1.



Şekilde grafiği verilen f fonksiyonu için aşağıdakilerden hangileri her zaman doğrudur?

I. $(-\infty, 1)$ de azalandır.
II. $(-1, 3)$ te azalandır.
III. $(1, \infty)$ da artandır.
IV. $(-\infty, 1)$ de artandır.
V. $x = -1$ ve $x = 3$ te türevi sıfırdır.
VI. $x = 1$ de türevi sıfırdır.
VII. $x = 2$ deki teğetinin eğimi pozitiftir.
VIII. $x = -2$ deki teğetinin eğimi pozitiftir.

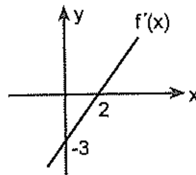
2.



Şekilde grafiği verilen f fonksiyonu için aşağıdakilerden hangileri daima doğrudur?

I. $(-\infty, -1)$ de azalandır.
II. $(-1, 3)$ te artandır.
III. $(1, 4)$ te azalandır.
IV. $(-\infty, 1)$ de artandır.
V. $x = 1$ ve $x = 4$ te türevi sıfırdır.
VI. $(4, \infty)$ da artandır.
VII. $x = -1$, $x = 3$ ve $x = 5$ te türevi sıfırdır.
VIII. $x = 2$ deki teğetinin eğimi pozitiftir.
IX. $f'(5) . f'(-3) < 0$ dır.

3.

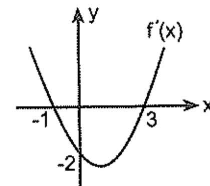


Şekilde f fonksiyonunun türevinin (f ' nün) grafiği verilmiştir.

Buna göre, f fonksiyonu için ağıdakilerden hangileri daima doğrudur?

I. Daima artandır.
II. $(-\infty, 2)$ de azalandır.
III. $(2, \infty)$ da artandır.
IV. $x = 2$ de türevi sıfırdır.

4.

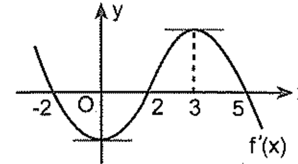


Şekilde f fonksiyonunun türevinin (f ' nün) grafiği verilmiştir.

Buna göre, f fonksiyonu için ağıdakilerden hangileri daima doğrudur?

I. $(-\infty, -1)$ da azalandır.
II. $(-\infty, 1)$ de azalandır.
III. $(-1, 3)$ te azalandır.
IV. $(1, 5)$ te artandır.
V. $(3, \infty)$ da artandır.
VI. $x = -1$ ve $x = 3$ te türevi sıfırdır.

1.



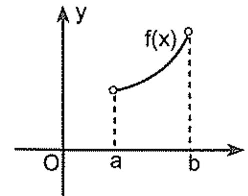
Şekilde f fonksiyonunun türevinin (f ' nün) grafiği verilmiştir.

Buna göre, f fonksiyonu için ağıdakilerden hangileri daima doğrudur?

I. $(-\infty, 0)$ da azalandır.
II. $(-\infty, -2)$ de artandır.
III. $(-2, 2)$ de azalandır.
IV. $(0, 3)$ te artandır.
V. $(5, \infty)$ da azalandır.
VI. $x = 0$ ve $x = 3$ te türevi sıfırdır.
VII. $x = -2$, $x = 2$ ve $x = 5$ de türevi sıfırdır.
VIII. $(3, \infty)$ da azalandır.

Bir f fonksiyonunun (a,b) aralığında
Pozitif tanımlı olması $f(x) > 0$,
Negatif tanımlı olması $f(x) < 0$,
Artan olması $f'(x) > 0$
Azalan olması $f'(x) < 0$ olması anlamına gelir.

2.



Şekilde (a, b) de pozitif tanımlı ve artan f fonksiyonunun grafiği verilmiştir.

Buna göre, ağıdakilerden hangileri negatif tanımlı ve azalandır?

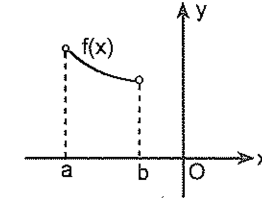
a) $2f(x) + 1$

b) $-\dfrac{1}{f(x)}$

c) $-f^2(x)$

d) $-x - f(x)$

3.

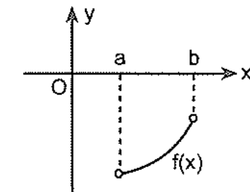


Şekilde (a, b) de pozitif tanımlı ve azalan f fonksiyonunun grafiği verilmiştir.

Buna göre, aşağıdaki fonksiyonlardan hangileri negatif tanımlı ve artandır?

a) $3f(x) - 1$
b) $\dfrac{-1}{f^2(x)}$
c) $-f(x)$
d) $\dfrac{-1}{f(x)}$

4.



Şekilde (a, b) de negatif tanımlı ve azalan f fonksiyonunun grafiği verilmiştir.

Buna göre, aşağıdaki fonksiyonlardan hangileri pozitif tanımlı ve artandır?

a) $1 - 3f(x)$
b) $\dfrac{-1}{f^3(x)}$
c) $-f^2(x)$
d) $\dfrac{-1}{f(x)}$

5. $0 < a < b$ olmak üzere,

f fonksiyonu (a, b) aralığında negatif tanımlı artan bir fonksiyondur.

Buna göre, aynı aralıkta aşağıdaki fonksiyonlardan hangileri kesinlikle pozitif tanımlı ve azalandır?

a) $f(x) + 2$ b) $f(-x)$

c) $\frac{-1}{f^2(x)}$ d) $-f^3(x)$

e) $1 - f(x)$ f) $\frac{-1}{f(x)}$

6. $a < b < 0$ olmak üzere,

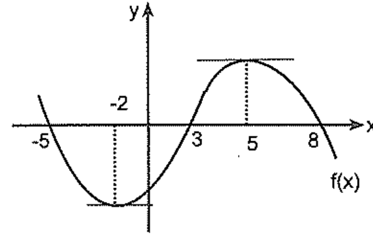
f fonksiyonu (a, b) aralığında pozitif tanımlı ve azalan bir fonksiyondur.

Buna göre, aynı aralıkta aşağıdaki fonksiyonlardan hangileri negatif tanımlı ve artandır?

a) $-f^2(x)$ b) $\frac{-1}{f(x)}$

c) $f(x)-3x$ d) $\frac{-x}{f(x)}$

7.



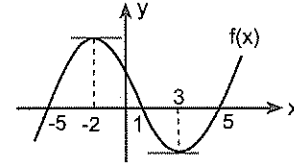
Şekilde verilen f fonksiyonunun grafiğine göre aşağıdaki ifadelerden hangileri her zaman doğrudur?

a) $f'(2).f'(1) > 0$ b) $f'(5) - f'(3) > 0$

c) $f(-4) + f'(7) < 0$ d) $f(0) + f'(5) = 0$

e) $f'(-2).f(2) < 0$ f) $f'(4) < f'(6)$

8.



Şekilde verilen f fonksiyonunun grafiğine göre aşağıdaki ifadelerden hangileri her zaman doğrudur?

a) $f(1) + f'(2) < 0$ b) $f'(-6) + f'(2) < 0$

c) $f'(3) + f'(-3) > 0$ d) $f(-5) + f'(5) = 0$

e) $f'(0) - f'(4) < 0$ f) $f(-4) + f'(3) < 0$

1. $f(x) = x^2 - 4x + 1$

fonksiyonu hangi aralıkta artandır?

2. $f(x) = x^3 - 3x^2$

fonksiyonu hangi aralıkta artandır?

3. $f(x) = \frac{x^4}{12} - x^3$

fonksiyonu hangi aralıkta artandır?

4. $f(x) = x^3 - 3x^2 - 24x + 5$

fonksiyonu hangi aralıkta azalandır?

5. $f(x) = \frac{x^3}{6} - 8x$

fonksiyonu hangi aralıkta azalandır?

6. m nin hangi değerleri için

$f(x) = \frac{mx + 4}{x + m}$

fonksiyonu daima azalandır?

7. m nin hangi değerleri için

$$f(x)=\frac{mx+m+12}{x+m}$$

fonksiyonu daima azalandır?

8. k nın hangi değerleri için

$$f(x)=\frac{kx-1}{x-k}$$

fonksiyonu daima artandır?

9. m nin hangi değerleri için

$$f(x)=\left(m^2-4\right)x+3$$

fonksiyonu <u>daima azalandır?</u>

10. c nin hangi değerleri için

$$f(x)=x^3-3x^2+cx+1$$

fonksiyonu <u>daima artandır?</u>

11. a nın hangi değerleri için

$$f(x)=x^3-ax^2+3x-2$$

fonksiyonu <u>daima artandır?</u>

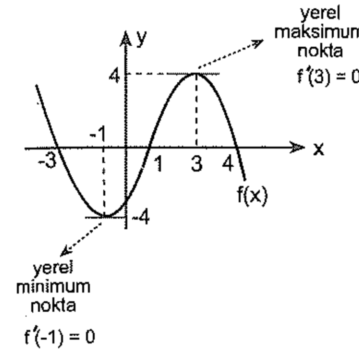
12. $f(x)=-x^3+6x^2-(3m+18)x-2$

fonksiyonu <u>daima azalan</u> olduğuna göre, m hangi değerleri alabilir?

Ekstremum Noktalar ve 1. Türevle İlişkisi

Acayip önemli bir yerdesiniz. Ona göre.☺
Onun için sağa sola dalmadan dikkatli bir şekilde takip edin bakalım.☺
İlk şunu söyleyeyim. Bir fonksiyonun ekstremum noktaları o fonksiyonun grafiğindeki tepecik ve çukurcuklardır.

Tepecikler **yerel maksimum noktalar**, çukurcuklar da **yerel minimum noktalardır.**



Şekilde grafiği verilen f(x) fonksiyonunun
$x=-1$ apsisli noktasında yerel minimumu var ve bu yerel minimum değeri – 4 tür. (Bu noktada f nin türevinin, yani teğetinin eğiminin sıfır olduğuna dikkat edin.)
$x=3$ apsisli noktasında yerel maksimumu var ve bu yerel maksimum değer 4 tür. (Bu noktada da f nin türevi sıfırdır.)

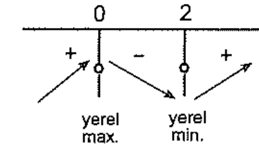
Bir fonksiyon x = a noktası öncesinde artan, sonra azalan ise grafikte bu noktada bir tepecik oluşur ve bu noktada yerel maksimum vardır.
Ama x = a dan önce azalan, sonrasında artan ise bu noktada bir çukurcuk oluşur ve bu noktada bir yerel minimum vardır.
Bir fonksiyonun yerel maksimum ve yerel minimum noktalarının hepsine birden **yerel ekstremum noktaları** denir.
Ve şunu aklınızdan çıkarmayın. Çok önemli☺
Bir fonksiyonun ekstremum noktalarında türevi varsa bu türev değeri sıfırdır.
Şurası da önemli...
Türevin işaret değiştirerek sıfır olduğu noktada ekstremum vardır.
Onun için türevin işaretini inceleyerek ekstremum noktaları çok daha kolay bulabilirsiniz.

Örnek Soru

$f(x)=x^3-3x^2+2$

fonksiyonunun yerel ekstremum noktaları nedir?

Çözelim☺
Çok klasik ve önemli bir soru.
Bir kere aklınızdan şunu hiç çıkarmayın. Eğer soruda kuralı verilen bir fonksiyonun ekstremum noktaları (yerel minimum ve yerel maksimum değerleri) soruluyorsa bu 1. türevle ilgilidir. 1. türevin işaretini inceleyip tablo yapın ve gerçekleri görün.
Yapalım. Ama önce türevini alıp köklerini bulmak lâzım. $f'(x)=3x^2-6x=0$ dan $x=0$ ve $x=2$ imiş☺
Şimdi birinci türevin işaret tablosunu yapabilirsiniz.



1. türevin pozitif olduğu aralıklarda (yukarı oklarla gösterilen aralıklarda) fonksiyon artan, negatif olduğu aralıkta (aşağı okla gösterilen aralıkta) ise azalandır.
Zaten tabloyu adam gibi yaparsanız nerede yerel maksimum, nerede yerel minimum var göreceksiniz.
Bunda x = 0 da yerel maksimum var. Ve bu **yerel maksimum değer f(0) = 2 dir.** Dolayısıyla yerel maksimum noktası (0,2) dir.
Aynı şekilde x = 2 de yerel minimum var. Ve bu **yerel minimum değer f(2) = – 2 dir.** Dolayısıyla da yerel minimum nokta (2, –2) noktasıdır.
Oldu mu şimdi?

1. $f(x)=x^2-4x+3$

fonksiyonunun yerel minimum noktasının apsisi kaçtır?

2. $f(x)=-x^2+bx+3$

fonksiyonunun x = 1 de yerel maksimumu olduğuna göre, b kaçtır?

3. $f(x) = -2x^2 - 8x + 1$

fonksiyonunun yerel maksimum değeri kaçtır?

4. $f(x) = \frac{x^3}{12} - 4x$

fonksiyonunun yerel maksimum değeri kaçtır?

5. $f(x) = x^3 - 6x^2 + 3$

fonksiyonunun yerel minimum değeri kaçtır?

6. $f(x) = x^3 - 2x^2 + x - 2$

fonksiyonunun yerel ekstremum noktalarının apsisleri toplamı kaçtır?

7. $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 2$

fonksiyonunun [2,4] aralığındaki en küçük değeri kaçtır?

8. $f(x) = \frac{-x^3}{4} + 3x - 5$

fonksiyonunun [1,3] aralığındaki en büyük değeri kaçtır?

9. $f(x) = x^3 - bx^2 + 4x + c$

eğrisinin yerel minimum noktası A(2,6) olduğuna göre, (b,c) nedir?

10. $f(x) = x^3 - 2x^2 + ax + b$

eğrisinin yerel minimum noktası A(1,4) olduğuna göre, (a,b) nedir?

1. $f(x) = x^3 + mx + n$

eğrisinin (– 1, 5) noktasında yerel ekstremumu olduğuna göre, m.n çarpımı kaçtır?

2. $f(x) = x^3 + bx^2 + cx + 4$

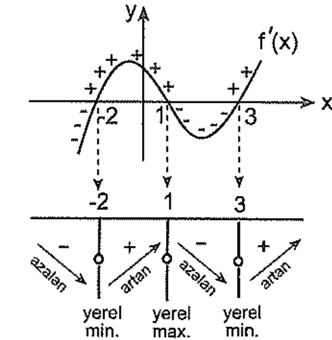
fonksiyonunun x = 1 ve x = – 4 apsisli noktalarında yerel ekstremumu olduğuna göre, b – c farkı kaçtır?

3. $f(x) = \frac{x^2 + mx}{x - 1}$

fonksiyonunun x = 2 apsisli noktasında yerel ekstremumu olduğuna göre, m kaçtır?

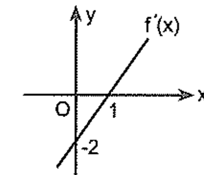
Soruda f nin türevinin (f ′ nün) grafiği verilir ve artan, azalan olduğu aralıklar ile ekstremum noktalarıyla ilgili şeyler sorulursa yapmanız gereken yine 1. türevin işaret tablosunu hazırlamak olsun. Çünkü en rahat öyle çözülüyor☺

Şu şekli iyi inceleyin. Aslında bu kısımla ilgili her şeyin özeti var bunda. f nin türevinin (f ' nün) grafiği verildiğinde f fonksiyonunun nerde azalan, nerde artan olduğunu ve hangi noktanın yerel minimum, hangisinin yerel maksimum olduğunu çok net bir şekilde görebilirsiniz. Ama görmek için bakmanız lâzım tabii ki☺



Yukarıdaki şekilde f nin türevinin (f ' nün) grafiğinden işaret tablosuna nasıl geçtiğime dikkat edin.

4. Aşağıda, her noktada türevlenebilir bir f fonksiyonunun türevinin (f ' nün) grafiği verilmiştir.



Yukarıdaki verilere uygun olarak alınacak f fonksiyonu için aşağıdakilerden hangileri kesinlikle doğrudur?

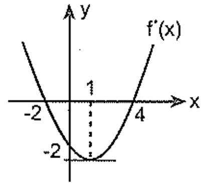
I. $-\infty < x < 1$ aralığında azalandır.
II. $1 < x < \infty$ aralığında artandır.
III. x = 1 de yerel maksimumu vardır.
IV. x = 1 de yerel minimumu vardır.
V. $(-\infty, \infty)$ da artandır.

5. $f(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 1$

fonksiyonu için aşağıdakilerden hangisi yanlıştır?

A) x = 0 da yerel maksimumu vardır.
B) x = 1 de yerel minimumu vardır.
C) Yerel maksimum değeri 1 dir.
D) $1 < x < \infty$ aralığında artandır.
E) $0 < x < 1$ aralığında artandır.

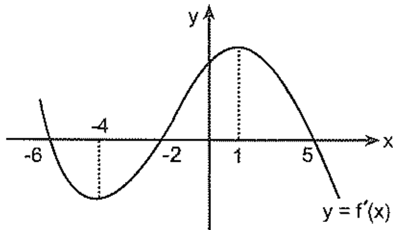
6. Aşağıda, her noktada türevlenebilir bir f fonksiyonunun türevinin (f ' nün) grafiği verilmiştir.



Yukarıdaki verilere uygun olarak alınacak f fonksiyonu için aşağıdakilerden hangileri kesinlikle doğrudur?

I. $-2 < x < 4$ aralığında azalandır.
II. $4 < x < \infty$ aralığında artandır.
III. $x = -2$ de yerel maksimumu vardır.
IV. $x = 4$ te yerel minimumu vardır.
V. $x = 1$ de yerel minimumu vardır.

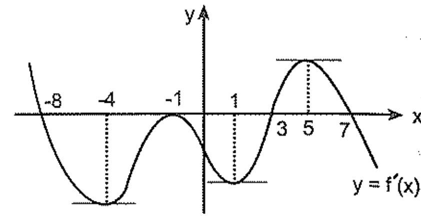
7. Aşağıda, her noktada türevlenebilir bir f fonksiyonunun türevinin (f ' nün) grafiği verilmiştir.



Yukarıdaki verilere uygun olarak alınacak f fonksiyonu için aşağıdakilerden hangileri kesinlikle doğrudur?

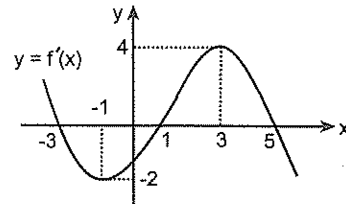
I. $-6 < x < -2$ aralığında azalandır.
II. $-\infty < x < -4$ aralığında azalandır.
III. $x = 1$ de yerel maksimumu vardır.
IV. $x = -2$ de yerel minimumu vardır.
V. $x = 5$ te yerel maksimumu vardır.
VI. $-2 < x < 5$ aralığında artandır

8. Aşağıda, her noktada türevlenebilir bir f fonksiyonunun türevinin (f ' nün) grafiği verilmiştir.



Buna göre, y = f(x) fonksiyonunun yerel ekstremum noktalarının apsisleri toplamı kaçtır?

9. Aşağıda, her noktada türevlenebilir bir f fonksiyonunun türevinin (f ' nün) grafiği verilmiştir.



Yukarıdaki verilere uygun olarak alınacak f fonksiyonu için aşağıdakilerden hangisi kesinlikle doğrudur?

A) $-1 < x < 3$ aralığında artandır.
B) $3 < x < 5$ aralığında azalandır.
C) $x = 1$ de yerel maksimumu vardır.
D) $x = -1$ de yerel minimumu vardır.
E) $x = 5$ te yerel maksimumu vardır

Maksimum ve Minimum Problemleri

Diyelim ki elinizde bir fonksiyon var.☺ Bu fonksiyonun minimum ya da maksimum değerini bulamaz mısınız? İşte buradaki olay da bu. Ama çoğu zaman fonksiyonu vermiyorlar tabii. Siz yazıyorsunuz. Birazdan göreceksiniz zaten. **Maksimum - minimum sorularında genel olarak, bir uzunluğun, alanın, hacmin veya başka bir şeyin en az ya da en çok kaç olabileceği sorulur.**

Maksimum ve minimum sorularını çözerken genel bir yöntem bilmek önemli. Yoksa farklı gibi duran her soruda " Şimdi n'tcez?" diye düşünmenin âlemi yok.
İlk önce kafanızda şunu netleştirin.
Sizden maksimum ya da minimum olması istenen nedir? Bir uzunluk mu? Bir alan mı? Her neyse işte... Bunu belirleyin.
Daha sonra bunu bir değişkene bağlı olarak ifade edin. (Yani, bir fonksiyon elde edin.)
Bundan sonrası ise kolay.
Şimdi elinizde bir fonksiyon var ve siz bu fonksiyonun maksimum ya da minimum değerini bulmak istiyorsunuz. Artık yapmanız gerekeni biliyorsunuz. Yapacağınız şey; bu fonksiyonun türevini alıp ve sıfıra eşitlemek ve maksimum ya da minimum yapan değeri bulmak.
Herhalde bir şeyler bulursunuz.☺

Örnek Soru

$x > 0$ olmak üzere, $y = \frac{2}{x}$ eğrisinin başlangıç noktasına en yakın olan noktasının, başlangıç noktasına olan uzaklığı kaç birimdir?

Çözelim☺
İlk önce sizden neyin istendiğini kafanızda netleştirin.
İstenen $y = \frac{2}{x}$ eğrisi üzerindeki orijine en yakın noktanın tespit edilerek bu noktanın orijine olan uzaklığının hesaplanması.
Yani, iki nokta arasındaki uzaklığın en küçük değeri.
O halde yapmanız gereken şey bu uzaklığı bir değişkene(x e) bağlı ifade edip sonra x e göre türevini almak.
Kısacası $y = \frac{2}{x}$ eğrisi üzerindeki bir noktanın **orijine olan en kısa uzaklığı** soruluyor.

Bunun için ilk önce eğri üzerinde bir nokta alın. Sonra da bu noktanın orijine olan uzaklığını formülle ifade edin. (Formülü de bilin gari☺).
Eğri üzerindeki bu nokta A(x,y) olsun. Ve $y = \frac{2}{x}$ miş zaten. Dolayısıyla alınan nokta $A\left(x, \frac{2}{x}\right)$ oldu.
Şimdi bu noktanın O(0,0) a uzaklığını koordinatları bilinen iki nokta arasındaki uzaklık formülünü kullanarak yazın.

Hatırlayın☺ $A(x_1, y_1)$ ve $B(x_2, y_2)$ noktaları arasındaki uzaklık $|AB| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ idi.

Buradan da istenen uzaklığı x e bağlı olarak
$|AO| = \sqrt{(x-0)^2 + \left(\frac{2}{x} - 0\right)^2} = \sqrt{x^2 + \frac{4}{x^2}}$ şeklinde ifade edin.
Artık bundan sonrası önceki antrenmanlar gibi.
$f(x) = \sqrt{x^2 + \frac{4}{x^2}}$ fonksiyonunun en küçük değeri kaçtır? Bunu bulacaksınız.

Bunun için bu fonksiyonun türevini alıp sıfıra eşitleyin. Ve $f'(x) = \dfrac{2x - \frac{8}{x^3}}{2.\sqrt{x^2 + \frac{1}{x^2}}} = 0$ dan $x = \sqrt{2}$ yi bulun.

Ama cevap $\sqrt{2}$ değil tabii ki. Eğer soruda sorulan eğri üzerindeki orijine en yakın noktanın apsisi olsaydı cevap $\sqrt{2}$ olurdu. Ama istenen $x = \sqrt{2}$ için $|AO|$ nun değeri.
Artık $x = \sqrt{2}$ için $|AO| = 2$ yi bulursunuz.

Evet, biraz uzun gibi. Ama olayın temel mantığını anlayabilmeniz için hem biraz zor bir soru seçtim. Hem de bu soruyu çözerken düşündüğüm her şeyi yazdım.
Anladınız mı bari☺

1. $x.(4 - x)$

çarpımının en büyük değeri kaçtır?

2. $y = 8 - x$

olduğuna göre, x.y çarpımının en büyük değeri kaçtır?

3. $y = \sqrt{4 - x^2}$

olduğuna göre, x + y toplamı en çok kaçtır?

4. A ve B noktaları arasındaki uzaklık L dir.

$$L = \sqrt{x^2 + \frac{4}{x^2}}$$

olduğuna göre, L en az kaçtır?

5. $y = x^2 - 9x - 2$

olduğuna göre, x in hangi değeri için x + y toplamı en küçük olur?

6. $|AB| = \sqrt{(x-2)^2 + (x-4)^2}$

olduğuna göre, $|AB|$ en az kaçtır?

7. Hangi x değeri için

$$|AB| = \sqrt{x^4 + (3-x)^2}$$

uzunluğu en az kaçtır?

8. x pozitif reel sayısı için

$$x + \frac{4}{x}$$

toplamının en küçük değeri kaçtır?

9. **3x + y = 120 olduğuna göre, x.y çarpımının en büyük değeri kaçtır?**

1. **a + b = 6 olduğuna göre, $a \cdot b^2$ çarpımının en büyük değeri kaçtır?**

2. **Kenar uzunlukları $20 - x^2$ cm ve 4x + 2 cm olan dikdörtgenin çevresi en çok kaç cm dir?**

3. $y = \sqrt{4 - x^2}$

olduğuna göre, x.y çarpımının en büyük değeri kaçtır?

4. x ve y pozitif reel sayılar olmak üzere, **x.y = 16 olduğuna göre, x + y toplamının en küçük değeri kaçtır?**

5. **Farklı iki kenarının uzunlukları (x + 4) cm ve (12 – 2x) cm olan dikdörtgenin alanı en çok kaç cm² dir?**

6. $f(x) = x^2 + 3x$ **eğrisi üzerindeki** $A(x_1, y_1)$ **noktasının koordinatları toplamı** x_1 **in hangi değeri için en küçük olur?**

7. $y = x^2$ parabolü üzerindeki P(a,b) noktası alınıyor.

Buna göre, a nın hangi değeri için $a^3 - 3b$ farkı minimum olur?

8. **$y = 4\sin x + 3\cos x$ in $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ aralığında aldığı en büyük değer kaçtır?**

9. $f(x) = 2\sin x + \cos x$

fonksiyonunun $[0, 2\pi]$ aralığında aldığı en küçük değer kaçtır?

10. $x^2 + (m-3)x + m + 3 = 0$ **denkleminin kökleri x_1 ve x_2 dir.**

Buna göre, $x_1^2 + x_2^2$ toplamını minimum yapan m değeri kaçtır?

11. $x^2 + (m^2+5)x + m - 2 = 0$ **denkleminin kökleri x_1 ve x_2 dir.**

Buna göre, $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$ toplamını maksimum yapan m değeri kaçtır?

12. Bir imalatçı, tamamını Q = 2x + 1 TL ye mal ettiği x tane kalemin tanesini P = 4 – 0,02x TL den satıyor.

Buna göre, imalatçının toplam kârının maksimum olması için kaç kalem imal etmesi gerekir?

1. Analitik düzlemde A(2, 2) ve B(k – 2, k) noktaları veriliyor.

Buna göre, k nın hangi değeri için |AB| en küçük değerini alır?

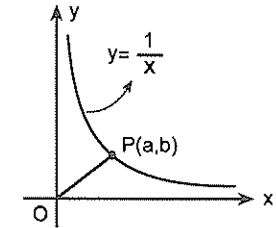
2. Dik koordinat düzleminde, A(– 5,0), B(2,0), C(6,0) noktaları veriliyor

Buna göre, Ox – ekseni üzerindeki hangi noktanın bu noktalara olan <u>uzaklıklarının kareleri toplamı</u> en küçüktür?

3. **Dik koordinat düzleminde y + 2x = 4 doğrusunun başlangıç noktasına (orijine) en yakın noktasının apsisi kaçtır?**

4. $y = \frac{4}{x}$ **fonksiyonunun başlangıç noktasına en yakın olan noktasının, başlangıç noktasına olan uzaklığı kaç birimdir?**

5.



Şekilde grafiği verilen $y = \frac{1}{x}$ fonksiyonunun orijine en yakın noktası P(a,b) olduğuna göre, |OP| kaç birimdir?

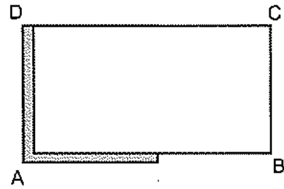
6. $y = x^2$ **parabolünün A(3,0) noktasına en yakın noktası B olduğuna göre, B noktasının apsisi kaçtır?**

7.

Şekildeki gibi dikdörtgen biçiminde ve bir kenarında duvar bulunan bir bahçenin üç kenarına bir sıra tel çekilmiştir.

Kullanılan telin uzunluğu 80 m olduğuna göre, bahçenin alanı en fazla kaç m^2 olabilir?

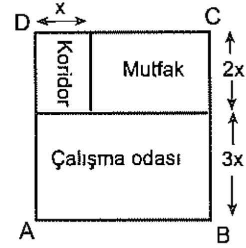
8.



Dikdörtgen biçimindeki bir bahçenin [AD] kenarının tümü ile [AB] kenarının yarısına şekildeki gibi duvar örülmüş, kenarlarının geriye kalan kısmına bir sıra tel çekilmiştir.

Kullanılan telin uzunluğu 120 m olduğuna göre, bahçenin alanı en fazla kaç m^2 olabilir?

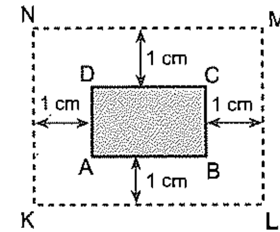
9.



Koridor, mutfak ve çalışma odasından oluşan bir işyerinin yukarıda verilen modeli ABCD dikdörtgenidir ve bu dikdörtgenin çevresinin uzunluğu 48 metredir.

Bu iş yerindeki mutfağın en geniş olması için x kaç metre olmalıdır?

10.



Çevresi 8 cm olan ABCD dikdörtgenin dışına kenarlarından 1 cm uzaklıkta KLMN dikdörtgeni çiziliyor.

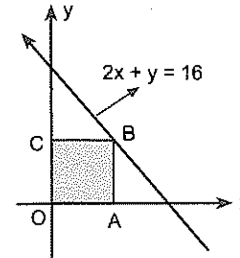
Buna göre, KLMN dikdörtgenin alanı en çok kaç cm^2 olabilir?

Pırt. yöntem (Tabir-i diğerle korsan yol☺)

Belki işinize yarar diye söylüyorum. Bir üçgenin içine çizilen dikdörtgenlerden alanı en büyük olanın alanı üçgen alanının yarısına eşittir. Ve her zaman öyledir☺

Çember içine çizilen max. alanlı veya çevreli dikdörtgen de karedir.

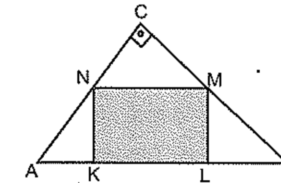
1.



Şekilde, koordinat düzleminin birinci bölgesinde B köşesi 2x + y = 16 doğrusu üzerinde olan OABC dikdörtgeni verilmiştir.

Buna göre, dikdörtgenin alanı en çok kaç birim karedir?

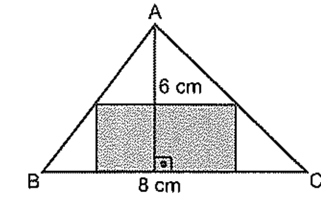
2.



Şekilde, dik kenar uzunlukları 4 cm ve 5 cm olan ABC dik üçgeninin içine M ve N köşeleri dik kenarlar üzerinde K ve L köşeleri de hipotenüs üzerinde olan KLMN dikdörtgeni çizilmiştir.

Buna göre KLMN dikdörtgeninin alanı en çok kaç cm^2 dir?

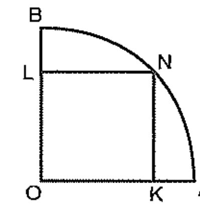
3.



Şekilde taban uzunluğu |BC| = 8 cm ve bu tabana ait yüksekliği 6 cm olan ABC üçgeninin iç bölgesinde şekildeki gibi dikdörtgenler çiziliyor.

Bu dikdörtgenlerden alanı en büyük olanının alanı kaç cm^2 dir?

4.

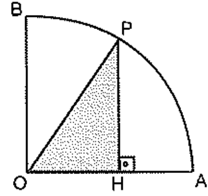


Yukarıdaki şekilde merkezi O, yarıçapı |OA| = |OB| = 2 cm olan dörtte bir çember yayı üzerindeki bir N noktasından yarıçaplara inen dikme ayakları K ve L dir.

Buna göre, OKNL dikdörtgeninin en büyük alanı kaç cm^2 dir?

Şu iki soruda üçgenlerin ikizkenar olması gerek☺

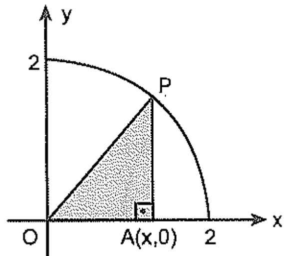
5.



Dik yarıçapları [OA], [OB] ve yarıçapı 4 birim olan çeyrek çember üzerindeki değişken bir P noktasının OA üzerindeki dik izdüşümü H olduğuna göre,

POH üçgeninin çevresi en çok kaç birim olabilir?

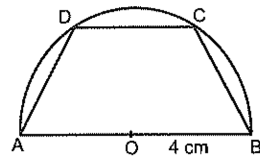
6.



Şekilde, denklemi $x^2 + y^2 = 4$ olan dörtte bir çemberin P noktasının x ekseni üzerindeki dik izdüşümü A(x,0) noktasıdır.

Buna göre, OAP üçgeninin alanı x in hangi değeri için en büyüktür?

7.

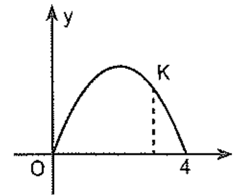


Şekilde, yarıçapı $|OB| = 4$ cm olan yarım çemberin içine ABCD yamuğu çizilmiştir.

Buna göre, alanı en büyük ABCD yamuğunun yüksekliği kaç cm dir?

8. **Yarıçapı 6 cm olan bir çember içine çizilebilecek en büyük alanlı dikdörtgenin çevresi kaç cm dir?**

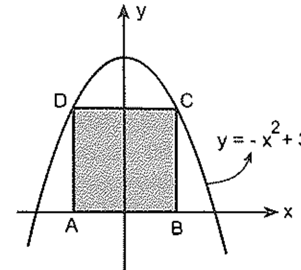
1.



Şekildeki $P(x_1, y_1)$ noktası denklemi $y = x(4 - x)$ olan parabol üzerindedir.

x_1 in hangi değeri için $x_1 + y_1$ maksimumdur?

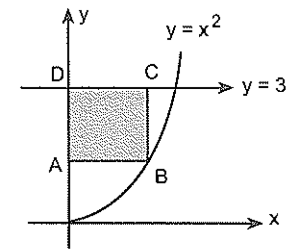
2.



A ve B noktaları Ox ekseni üzerinde, C ve D noktaları ise $y = 3 - x^2$ parabolü üzerinde pozitif ordinatlı noktalar olmak üzere şekildeki gibi ABCD dikdörtgenleri oluşturuluyor.

Bu dikdörtgenlerden alanı <u>en büyük</u> olanın alanı kaç birim karedir?

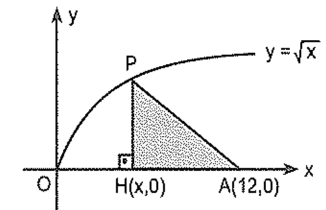
3.



Şekilde $y = x^2$ parabolü üzerindeki B noktasının y = 3 doğrusu ve Oy ekseni üzerindeki dik izdüşümleri sırasıyla A ve C dir.

y = 3 doğrusunun Oy eksenini kesim noktası D olduğuna göre ABCD dikdörtgeninin alanı en çok kaç cm² dir?

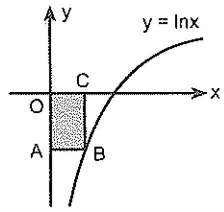
4.



Denklemi $y = \sqrt{x}$ olan şekildeki parabolün P noktalarının x ekseni üzerindeki dik izdüşümü H(x,0) dır.

A(12,0) olduğuna göre, HAP üçgeninin alanı, x in hangi değeri için en büyüktür?

5.

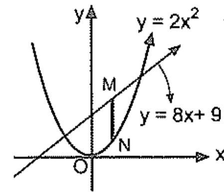


Şekilde dik koordinat düzleminde grafiği verilen y = lnx eğrisinin üzerinde alınan B noktasının Ox ve Oy ekseni üzerindeki dik izdüşümleri sırasıyla C ve A dır.

Buna göre, OABC dikdörtgeninin alanı en çok kaç birim karedir?

6. **Bir kare dik prizmanın tabanının bir ayrıtı ile yüksekliğinin toplamı 6 cm olduğuna göre, bu prizmanın hacmi en çok kaç cm^3 tür?**

7.



Şekilde grafiği verilen $y = 2x^2$ parabolü ile $y = 8x + 9$ doğrusu arasında y eksenine paralel olacak biçimde |MN| çizilmiştir.

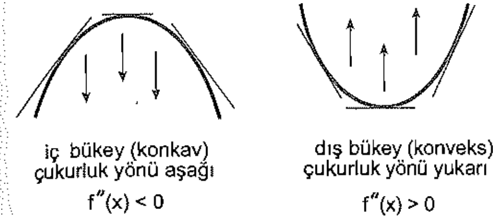
Buna göre, |MN| en çok kaç birimdir?

8. Bir üretici, üretim maliyeti $Q = 10x + 20$ lira olan x adet ürünün tanesini $P = 90 - 0{,}2x$ liradan satıyor.

Buna göre, üreticinin toplam karının maksimum olması için kaç adet ürün satması gerekir?

Büküm (Dönüm) noktası, iç bükeylik, dış bükeylik ve II. türevle İlişkisi

Önce güzel bi şekil yapayım☺



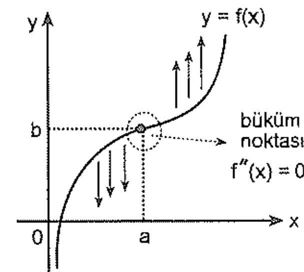
Bir eğriye tanım aralığının belli bir alt aralığında çizilen teğetler eğrinin üstündeyse eğri bu aralıkta **içbükey** (çukurluğu aşağı doğru), altındaysa **dışbükey** (çukurluğu yukarı doğru) **dir.**

Bunun türevle ilişkisi ne? Onu da izah edeyim.
Bir fonksiyonun ikinci türevi (f ") fonksiyonun içbükey (çukurluğu aşağı) olduğu aralıkta negatif, dışbükey (çukurluğu yukarı) olduğu aralıkta ise pozitiftir. Bütün olay bu işte☺
Özetleyeyim.

f "(x) < 0 ise fonksiyon içbükey (çukurluk aşağı)
f "(x) > 0 ise fonksiyon dışbükey (çukurluk yukarı)

Büküm (Dönüm) Noktası

Fonksiyonun içbükeylikten dışbükeyliğe veya dışbükeylikten içbükeyliğe geçiş noktalarına **fonksiyonun büküm (dönüm) noktaları** denir.



Şekilde x = a noktasında türevlenebilen f fonksiyonu bu noktanın solunda içbükey (f "(x) < 0), sağında dışbükey (f "(x) > 0), olduğundan x = a da dönüm (büküm) noktası vardır.

Bir fonksiyon büküm (dönüm) noktasında türevlenebilir ise bu noktadaki ikinci türevi sıfırdır. Yani, verilen şekilde f "(a) = 0 dır.

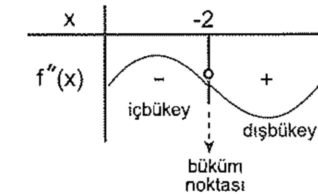
O halde genel bir özet yapıp şunları not edelim.
Bir fonksiyonun içbükey, dışbükey olduğu aralıklar veya dönüm (büküm) noktası sorulmuşsa bunlar ikinci türevle ilgilidir.

Örnek Soru

$$f(x) = x^3 + 6x^2 - 3x + 2$$

fonksiyonunun içbükey, dışbükey olduğu aralıklar ve büküm(dönüm) noktası nedir?

Çözelim.☺
Aklınızda olsun. Bir fonksiyonun
İçbükey (konkav), dışbükey (konveks) olduğu aralıklar veya büküm (dönüm) noktası sorulmuşsa bunlar ikinci türevle ilgilidir. Onun için hemen fonksiyonun ikinci türevini alın kökleri bulun ve işaret tablosu yaparak işaretini inceleyin.
Alalım bakalım ikinci türevi. Ve sıfıra eşitleyip köklerini bulalım. Sonra da tablo tabii ki.
Ama önce birinci türev.
$f'(x) = 3x^2 + 12x - 3$ bunun da türevini alıp ikinci türevi bulalım.
$f''(x) = 6x + 12 = 0$ dan $x = -2$ yi bulun.
Ve işaret tablosu



Tabloda her şey var. Bakıp anlayın artık☺
$(-\infty, -2)$ aralığında ikinci türev negatif olduğundan fonksiyon bu aralıkta içbükeydir.
$(-2, \infty)$ aralığında ise ikinci türev pozitif olduğundan bu aralıkta dışbükeydir.
Bu fonksiyonun büküm (dönüm noktasının apsisi ise – 2 dir. Doğru. Peki, ordinatı kaçtır?
f(–2) değil mi?
O da f(–2) = 24 olduğundan dönüm noktası (–2,24) tür. Var mı bi problem?

Gördüğünüz gibi birinci ve ikinci türevin yorumu acayip zor bi şeye benzemiyor. Biraz bilgi birikimi, biraz da cebirsel yetenek varsa sıkıntı olmuyor. Aksi durumda üzgünüm tabii ki.
Aslında eşitsizliklerdeki gibi tablo yapmayı ve ne anlama geldiğini bilmiyorsanız öğrenip gelmenizde fayda var☺ Gidip öğrenin de öyle gelin.☺

1. **Denklemi $y = x^3 + x^2$ olan eğrinin dönüm (büküm) noktasının apsisi kaçtır?**

2. $f(x) = -2x^3 + 6x^2 + 3x + 1$
fonksiyonunun büküm(dönüm) noktasının apsisi kaçtır?

3. $f(x) = -x^3 + 3x^2 + x - 1$
fonksiyonunun büküm (dönüm) noktasının ordinatı kaçtır?

4. $f(x) = kx^3 + 6x^2 - 7x - 2$
fonksiyonunun büküm (dönüm) noktasının apsisi 1 olduğuna göre, ordinatı kaçtır?

5. $f(x) = -x^3 + 3x^2 + 2x + 3$
fonksiyonunun dönüm (büküm) noktasının koordinatları nedir??

6. $f(x) = x^4 - mx^3 + mx + m$
fonksiyonunun büküm (dönüm) noktasının apsisi – 1 olduğuna göre, ordinatı kaçtır?

7. $f(x) = -2x^3 + 6x^2 + 4x - 3$
fonksiyonu hangi aralıkta dışbükeydir? (Çukurluk yönü yukarı doğrudur?)

8. $f(x) = x^4 - 6x^2 - 2$
fonksiyonu hangi aralıkta içbükeydir? (Çukurluk yönü aşağı doğrudur?)

1. $f(x) = x^3 + ax^2 + b$
fonksiyonunun büküm (dönüm) noktası B(1,3) olduğuna göre, b kaçtır?

2. $f(x) = x^3 + ax^2 + bx - 4$
eğrisinin dönüm noktası A(–1, 3) olduğuna göre, a.b çarpımı kaçtır?

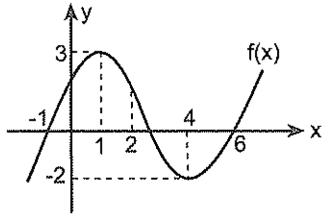
3. $f(x) = -2x^3 + ax^2 - bx + 4$
denklemiyle verilen eğrinin dönüm (büküm) noktasının apsisi –1 ve eğrinin x = 1 de yerel ekstremumu olduğuna göre, (a,b) nedir?

4. $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4x + 2$
fonksiyonuna büküm (dönüm) noktasında çizilen teğetin eğimi kaçtır?

5. Denklemi $y = x^3 - 3x^2 + x + 2$ olan eğri,
   a) **Hangi aralıkta iç bükeydir?**
   b) **Hangi aralıkta dış bükeydir?**
   c) **Dönüm (büküm) noktası nedir?**

6. Denklemi $y = -x^3 + \frac{x^2}{2} + 3$ olan eğri,
   a) **Hangi aralıkta iç bükeydir?**
   b) **Hangi aralıkta dış bükeydir?**
   c) **Dönüm (büküm) noktasının apsisi kaçtır?**

7. Denklemi $y = \frac{x^4}{12} - \frac{x^3}{3} - 1$ olan eğri,
   a) **Hangi aralıkta iç bükeydir?**
   b) **Hangi aralıkta dış bükeydir?**
   c) **Dönüm (büküm) noktasının apsisleri kaçtır?**



Yukarıda grafiği verilen f fonksiyonunun çukurluğu x = 2 apsisli noktada yön değişmektedir.

Buna göre, (– ∞, ∞) aralığında tanımlı f fonksiyonu için aşağıdaki soruları cevaplayınız.

8. f fonksiyonunun yerel maksimum noktasının apsisi kaçtır?

9. f fonksiyonunun yerel minimum noktasının apsisi kaçtır?

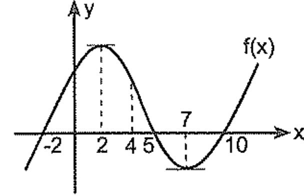
10. f fonksiyonunun yerel maksimum değeri kaçtır?

11. f fonksiyonunun artan olduğu en geniş aralık nedir?

12. f fonksiyonun azalan olduğu en geniş aralık nedir?

13. f fonksiyonunun büküm noktasının apsisi kaçtır?

14. f fonksiyonu hangi aralıkta içbükeydir?



Yukarıda grafiği verilen f fonksiyonunun çukurluğu x = 4 apsisli noktada yön değişmektedir.

Buna göre, (– ∞, ∞) aralığında tanımlı f fonksiyonu için aşağıdaki soruları cevaplayınız.

15. Aşağıdakilerden hangisi yanlıştır?

A) f(3) > 0 B) f '(2) = 0 C) f "(1) < 0
D) f "(6) < 0 E) f '(9) > 0

16. Aşağıdakilerden hangisi yanlıştır?

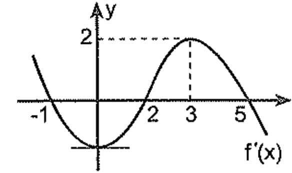
A) f(5) = 0 B) f '(–2) = 0 C) f "(7) > 0
D) f "(4) = 0 E) f '(5) < 0

17. Aşağıdakilerden hangisi doğrudur?

A) f(– 2) = f '(7) B) f '(5) > f(10)
C) f '(0) < f "(2) D) f '(1).f '(2) > 0
E) f '(–3).f "(3) > 0

18. Aşağıdakilerden hangisi doğrudur?

A) f '(3) < f(4) B) f '(8) < f(8)
C) f "(0) > f "(4) D) f "(2).f(2) > 0
E) f '(1).f "(1) > 0



Yukarıda her noktada türevlenebilen f fonksiyonunun birinci türevinin (f ' nün) grafiği verilmiştir.

Aşağıdaki soruları bu grafiğe göre cevaplayınız.

1. f fonksiyonunun yerel maksimum noktalarının apsisleri toplamı kaçtır?

2. f fonksiyonunun yerel minimum noktasının apsisi kaçtır?

Şunu da bilseniz hiç fena olmaz.☺ Biraz ayrıntı gerçi. Ama olsun. Yine de bakın siz.☺
Bir fonksiyonun 1. türevinin grafiğine çizilen teğetin eğimi 2. türevi verir. Dolayısıyla 1. türevin fonksiyonunun artan olduğu aralıklarda ikinci türev pozitif, azalan olduğu yerlerde ise negatiftir.

3. f fonksiyonunun büküm noktalarının apsisleri kaçtır?

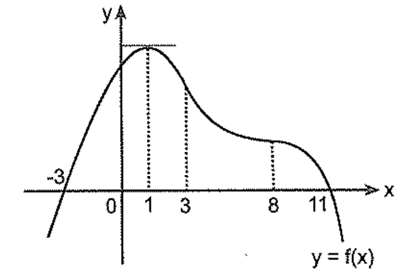
4. f fonksiyonun artan olduğu en geniş aralık nedir?

5. f fonksiyonun azalan olduğu en geniş aralık nedir?

6. f fonksiyonunun içbükey (çukurluğu aşağı) olduğu en geniş aralık nedir?

7. f fonksiyonunun dışbükey (çukurluğu yukarı) olduğu en geniş aralık nedir?

8.

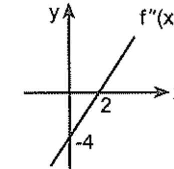


Yukarıda her noktada türevlenebilen f fonksiyonunun çukurluğu x = 3 ve x = 8 apsisli noktalarda yön değiştirmektedir.

Buna göre, f fonksiyonu için aşağıdakilerden hangisi yanlıştır?

A) – ∞ < x < 3 aralığında içbükeydir.
B) x = 3 te büküm noktası vardır.
C) 3 < x < 8 aralığında f "(x) > 0 dır.
D) 8 < x < ∞ aralığında dışbükeydir.
E) f "(8) > f "(1) dir.

9.

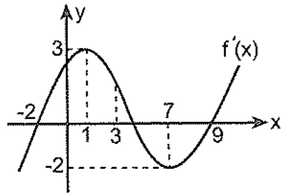


Yukarıda her noktada türevli f fonksiyonunun ikinci türevinin grafiği verilmiştir.

Buna göre, f fonksiyonu için aşağıdakilerden hangisi doğrudur?

A) 2 < x < ∞ aralığında azalandır.
B) (-∞, ∞) aralığında artandır.
C) (-∞, 2) aralığında artandır.
D) x = 2 de dönüm (büküm) noktası vardır.
E) (-∞, ∞) aralığında dışbükeydir.

10.



Yukarıda her noktada türevlenebilen f fonksiyonunun birinci türevinin (f ' nün) grafiği verilmiştir.

Buna göre, f fonksiyonu için aşağıdakilerden hangisi yanlıştır?

A) $-\infty < x < 1$ aralığında dışbükeydir.

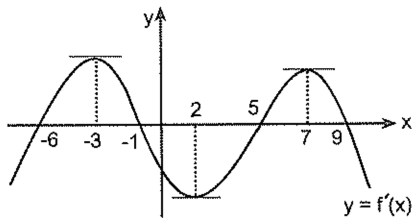
B) x = 7 de büküm noktası vardır.

C) $3 < x < 7$ aralığında iç bükeydir.

D) $-2 < x < 3$ aralığında iç bükeydir.

E) f "(1) > f "(2) dir.

11.



Şekilde f fonksiyonunun türevinin (f ' nün) grafiği verilmiştir.

Buna göre, f fonksiyonu için aşağıdaki ifadelerden hangileri yanlıştır?

A) $-6 < x < -1$ aralığında artandır

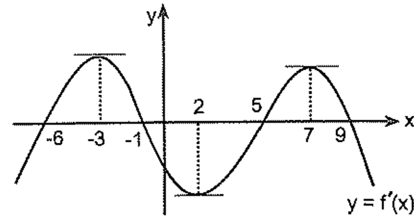
B) x = 5 te ekstremumu vardır.

C) $-1 < x < 5$ aralığında azalandır.

D) $-1 < x < 5$ aralığında dışbükeydir.

E) $7 < x < \infty$ aralığında içbükeydir

12.



Şekilde f fonksiyonunun türevinin (f ' nün) grafiği verilmiştir.

Buna göre, f fonksiyonu için aşağıdaki ifadelerden hangileri doğrudur?

A) $-3 < x < 2$ aralığında dışbükeydir.

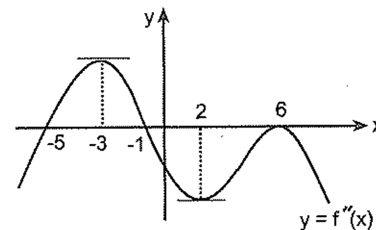
B) x = 7 de ekstremumu vardır.

C) $2 < x < 7$ aralığında iç bükeydir.

D) $5 < x < 9$ aralığında iç bükeydir.

E) $-\infty < x < -3$ aralığında dışbükeydir.

13.



Yukarıda her noktada türevlenebilen f fonksiyonunun ikinci türevinin (f " nün) grafiği verilmiştir.

Buna göre, aşağıdakilerden hangisi doğrudur?

A) $-5 < x < -1$ aralığında içbükeydir.

B) x = – 3 te bir büküm noktası vardır.

C) x = 6 da bir büküm(dönüm) noktası vardır.

D) $-\infty < x < -5$ aralığında içbükeydir.

E) x = 2 de bir büküm noktası vardır.

Limit Sorularında Türevin Kullanılması

Bunu kesinlikle çok seveceksiniz☺

Çünkü daha önce bir sürü zaman harcayarak çözdüğünüz☺ bazı gıcık limit sorularını şimdi acayip kolay bir şekilde çözeceksiniz. Ama baştan söyleyeyim. Türev alma kurallarını biliyor olmanız lâzım. Türev alma kurallarını bilmiyorsanız üzgünüm.

L'Hospital Kuralı (Lopital diye okuyun.☺)

Dayanamayıp söylicem. ☺ Bir kerem bu adam! bu kuralı çalmış. 'bu bir.

Şimdi "Nereden biliyorsun ki?" diyeceksiniz.

Eee... Araştırdık herhalde☺

Aslında bu kural **John Bernolli** denen adama aitmiş. Adamcaz kuralı bulmuş ama nimetini L'Hospital amca yemiş. Başka şeyler yiyip yemediğini bilmiyorum.☺ Bu da iki☺

Neyse o kısmı boş verin. Sizi ilgilendiren kısmına geleyim.

Diyelim ki limiti hesaplarken x e değer verdiniz. Ve bir de baktınız ki sonuç $\frac{0}{0}$ veya $\frac{\infty}{\infty}$ çıkıyor. Bu durumda yapmanız gereken payın türevini ayrı, paydanın türevini de ayrı almak ve x yerine değerini tekrardan yazmak. Sonuç kaç ise limit değeri de o dur.

Bu kurala **L'Hospital kuralı** denir. Ve acayip faydalı bir kural.☺ Göreceksiniz.☺

Eğer belirsizlik devam ederse problem değil. Siz de kuralı uygulamaya devam edersiniz.

Ama unutmayın ki bu kural sadece $\frac{0}{0}$ ve $\frac{\infty}{\infty}$ belirsizliği varsa kullanılır. Yoksa kafanıza göre her soruda kullanamazsınız. Bilginiz olsun☺

Bir kez daha söyleyeyim. Bu kuralı uygularken payın türevini ayrı, paydanın türevini ayrı alacaksınız. Anladınız mı?

Anlamadıysanız bir daha okuyun☺

Yine anlamadıysanız bi daha.☺

Ve lütfen kuralı uygulamadan önce soruda $\frac{0}{0}$ ve $\frac{\infty}{\infty}$ belirsizliği olduğundan da emin olun.

Bir örnek çözersem anlattıklarımı daha iyi anlayacaksınız☺

Örnek Soru

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^5 + x^2 - 2}{x^2 - x}$$

limitinin değeri kaçtır?

Çözelim☺

Limit sorularını çözerken yapacağınız ilk şeyi hatırlayın. x yerine verilen değeri yazıyorduk.

Yazalım bakalım.

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^5 + x^2 - 2}{x^2 - x} = \frac{1^5 + 1^2 - 2}{1^2 - 1} = \frac{0}{0}$$

Sonuç $\frac{0}{0}$ çıkınca daha önce çarpanlara ayırma yöntemlerini ve müthiş cebirsel yeteneklerinizi kullanıp bu belirsizlik olayını halletmeye çalışıyordunuz.

Yine deneyin bakalım.

Yemiyor di mi?

İşte L' Hospital kuralı bu sıkıntılı durumdan kurtulmak için kullanılıyor.

Kuralı az önce anlatmaya çalıştım. Ama isterseniz tekrardan hatırlayın. Kural şuydu; soruda $\frac{0}{0}$ ve $\frac{\infty}{\infty}$ belirsizliği varsa payın ve paydanın ayrı ayrı türevini alıp x e tekrardan değerini veriyorduk.

Alıp da verelim bakalım kaç çıkıyor?

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^5 + x^2 - 2}{x^2 - x} = \lim_{x \to 1} \frac{5x^4 + 2x}{2x - 1} = \frac{5.1^4 + 2.1}{2.1 - 1} = 7$$

İşte sonucu bulmuş olduk.

Şimdi anladınız mı hangi limit sorularında L'Hospital kuralı kullanıldığını?

1. $$\lim_{x \to 3} \frac{x^2 - x - 6}{x^2 - 9}$$

limitinin değeri kaçtır?

2. $$\lim_{x \to 2} \frac{x^3 - 8}{x^2 - 9x + 14}$$

limitinin değeri kaçtır?

3. $\lim_{x \to 1} \frac{x^3+5x-6}{x^2-x}$

limitinin değeri kaçtır?

4. $\lim_{a \to b} \frac{a^3-2a^2b+b^3}{a^2-ab}$

limitinin değeri kaçtır?

5. $\lim_{x \to -1} \frac{x^{10}-x^5-2}{x^5+1}$

limitinin değeri kaçtır?

6. $\lim_{x \to -1} \frac{x^3+3x+4}{x^2-x-2}$

limitinin değeri kaçtır?

7. $\lim_{x \to -1} \frac{\frac{1}{x^3}+1}{x^2+x}$

limitinin değeri kaçtır?

8. $\lim_{x \to 1} \frac{\sqrt[3]{x^2}-1}{x-1}$

limitinin değeri kaçtır?

9. $\lim_{x \to 64} \frac{\sqrt[3]{x}-4}{\sqrt{x}-8}$

limitinin değeri kaçtır?

10. $\lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{x+3}-2}{\sqrt{x}-1}$

limitinin değeri kaçtır?

1. $\lim_{x \to 1} \frac{\ln x}{x-1}$

limitinin değeri kaçtır?

2. $\lim_{x \to 1} \frac{\ln x}{\sqrt{x}-1}$

limitinin değeri kaçtır?

3. $\lim_{x \to 1} \frac{x-1+\ln x}{x^2-1}$

limitinin değeri kaçtır?

4. $\lim_{x \to 1} \frac{1-\sqrt{x}}{\ln x}$

limitinin değeri kaçtır?

5. $\lim_{x \to 1} \frac{x \ln x}{\sqrt{x^2-1}}$

limitinin değeri kaçtır?

6. $\lim_{x \to 2} \frac{\ln(x-1)}{\sqrt{x^2-4}}$

limitinin değeri kaçtır?

7. $\lim_{x \to 0} \frac{\ln(\cos x)}{x^2+x}$

limitinin değeri kaçtır?

8. $\lim_{x \to 0} \frac{e^x-1}{x}$

limitinin değeri kaçtır?

9. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(x+1)}{1-e^x}$

limitinin değeri kaçtır?

10. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{e^x - e}{\ln x}$

limitinin değeri kaçtır?

11. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x + \arcsin x}{\tan x}$

limitinin değeri kaçtır?

12. $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{3}} \dfrac{2\cos x - 1}{\tan x - \sqrt{3}}$

limitinin değeri nedir?

13. $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}} \dfrac{\sin^2 x - \frac{1}{2}}{\sin 4x}$

limitinin değeri kaçtır?

14. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sin \pi x}{x - 1}$

limitinin değeri kaçtır?

15. $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{6}} \dfrac{1 - \sin 3x}{4\sin^2 x - 1}$

limitinin değeri kaçtır?

16. $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \dfrac{1 + \sin 3x}{\sin 2x + \cos x}$

limitinin değeri kaçtır?

1. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{-1 + \cos 2\pi x}{x - 1}$

limitinin değeri kaçtır?

2. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos x}{x}$

limitinin değeri kaçtır?

3. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sqrt{x} - \cos(2\pi x)}{x - 1}$

limitinin değeri kaçtır?

4. $\lim\limits_{x \to \pi} \dfrac{2\tan x}{x - \pi}$

limitinin değeri kaçtır?

5. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^2 + 2x}{\arctan x}$

limitinin değeri kaçtır?

6. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x + \sin 4x}{5x}$

limitinin değeri kaçtır?

7. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2x + \sin 4x}{x + \tan 2x}$

limitinin değeri kaçtır?

8. $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{1 - \cos\sqrt{x}}{x}$

limitinin değeri kaçtır?

9. $\lim_{x \to 1} \frac{\sin(x-1)}{x^2-1}$

limitinin değeri kaçtır?

10. $\lim_{x \to 2} \frac{\tan(x^2-4)}{x^4-16}$

limitinin değeri kaçtır?

11. $\lim_{x \to 3} \frac{\sin(2x-6)}{x^2-9}$

limitinin değeri kaçtır?

12. $\lim_{c \to x} \frac{16x^2-16c^2}{4\sin(x-c)}$

limitinin değeri kaçtır?

13. $\lim_{y \to x} \frac{6x^3-6y^3}{\sin(2x-2y)}$

limitinin değeri kaçtır?

14. $\lim_{n \to \infty} \frac{\tan\frac{6}{n}}{\frac{1}{n}}$

limitinin değeri kaçtır?

15. $\lim_{n \to \infty} \frac{\sin\frac{24}{n}}{\frac{6}{n}}$

limitinin değeri kaçtır?

16. $\lim_{x \to \infty} \frac{\tan\left(\frac{6}{x+1}\right)}{\frac{2}{x-1}}$

limitinin değeri kaçtır?

1. $\lim_{x \to \infty} \frac{\sin\frac{3}{x}}{\frac{1}{2x+1}}$

limitinin değeri kaçtır?

2. $f(x) = 2x^2 + 3$

olduğuna göre, $\lim_{h \to 0} \frac{f(h+3)-f(3)}{h}$ **değeri kaçtır?**

3. $f(x) = e^{\tan x}$ olduğuna göre,

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{f(x)-f\left(\frac{\pi}{4}\right)}{x-\frac{\pi}{4}}$$

limitinin değeri kaçtır?

4. $f(x) = \sin^2 x$ olduğuna göre,

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{6}} \frac{f(x)-f\left(\frac{\pi}{6}\right)}{x-\frac{\pi}{6}}$$

limitinin değeri kaçtır?

5. $f'(3) = 4$ olduğuna göre,

$$\lim_{h \to 1} \frac{f(5-2h)-f(h+2)}{h^2-1}$$

limitinin değeri kaçtır?

6. f: R → R ye her noktada türevli bir fonksiyon ve $f'(1) = 4$ olduğuna göre,

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(1+3h)-f(1-2h)}{h}$$

limitinin değeri kaçtır?

7. $f(x) = x^2 + 3x - 2$ olduğuna göre,

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(h+1)-f(1-2h)}{h}$$

limitinin değeri kaçtır?

8. $f(x) = 2x^3 + x - 1$ olduğuna göre,

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(2h+1)-f(1-3h)}{h}$$

limitinin değeri kaçtır?

9. Türevlenebilir bir f: R → R fonksiyonu için

$f'(x) = 2x^2 + 1$
$f(3) = 6$

olduğuna göre, $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{f(x) - 6}{x - 3}$ **limitinin değeri kaçtır?**

L'hospital kuralını uyguladınız ama belirsizliği gideremediniz diyelim. Ne yapacaktınız?
Aynı kuralı bir kez daha uygulayacaktınız değil mi?

10. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^3 + x^2 - 5x + 3}{x^3 + 2x^2 - 7x + 4}$

limitinin değeri kaçtır?

11. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(\cos x)}{x^2}$

limitinin değeri kaçtır?

12. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\cos 2x - \cos x}{x^2}$

limitinin değeri kaçtır?

13. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^2 + x - \sin x}{1 - \cos x}$

limitinin değeri kaçtır?

14. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos 2x}{\sin x}$

limitinin değeri kaçtır?

15. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\cos(\pi x) + 1}{\sin\left(\dfrac{\pi x}{2}\right) - 1}$

limitinin değeri kaçtır?

16. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x.\sin\left(\dfrac{\pi}{2}x\right) - 1}{x - 1}$

limitinin değeri kaçtır?

FONKSİYON GRAFİKLERİ

Fonksiyonların grafiğini çizebilmek önemli. Fakat çizemeseniz bile test sorularında kuralı verilen bir fonksiyonun grafiğini veya grafiği verilen bir fonksiyonun denklemini şıkları irdeleyerek bulabilirsiniz. Zaten size de bu lâzım.☺ Onun için boş verin. Bütün grafikleri çizmenizin bir âlemi yok. ☺

İlk olarak;

Polinom Fonksiyonların Grafikleri

$f(x) = x^2 - 3x - 4$

$f(x) = -2(x - 3)^2(x + 1)$

gibi fonksiyonların (polinom fonksiyonların) grafikleriyle ilgili sorularda,

- **Eksenleri kesim noktalarına bakın.**
- **x eksenine teğet olup olmadığına bakın.**
- Eğer çok gerekliyse☺ fonksiyonun artan, azalan olduğu aralıklar, yerel ekstremum noktaları ve büküm noktalarını bulun. (Çoğu zaman buna gerek bile olmadığını göreceksiniz.)

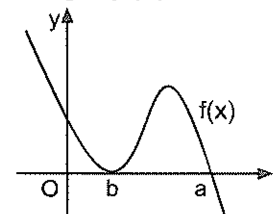
Hatırlayın.
Eksenleri kesim noktaları bütün fonksiyonlar için aynı şekilde bulunuyordu.
x = 0 için fonksiyonun y eksenini kesim noktası, y = f(x) = 0 için de x eksenini kesim noktaları bulunuyordu.

Şu x eksenine teğet olma olayını da izah edeyim. Fonksiyon grafikleriyle ilgili test sorularında (özellikle polinom fonksiyonlar) x eksenini kesim noktalarını bulmak işinizi acayip kolaylaştıracak. Göreceksiniz☺. Şu yazdığıma bakın.☺

$y = (x - a)(x - b)^2$

x = a da keser   x = b de teğet

Bunu grafik üzerinde de temsili olarak göstereyim. Meselâ bunun grafiği şöyle olabilir.

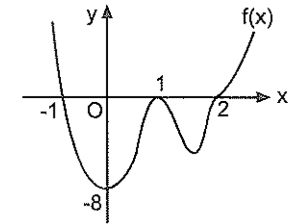


Aslında buradaki bütün olayın özeti şunda var☺

$y = (x + 1)(x - 1)^2(x - 2)^3$ gibi bir fonksiyonun grafiği y eksenini x = 0 için y = –8 olduğundan (0,– 8) noktasında keser.

x eksenini ise y = 0 için x = – 1 de keser.
x = 1 de x eksenine teğet
x = 2 de büküm nok. vardır.

Bu eğrinin grafiği taslak olarak şu şekilde olabilir.



Test sorularını çözerken sadece bunları bilmek bile yeterli.
Var mı bi zorluğu?

1. Aşağıdaki fonksiyonların y eksenini kesim noktalarının ordinatları kaçtır?

a) $y = x^2 - 2x - 8$

b) $y = -2(1 - x)^2(x + 1)$

c) $y = x^3 - x^2 - 4x + 4$

2. Aşağıdaki fonksiyonların x eksenini kesim noktalarının apsisleri kaçtır?

a) $y = x^2 - x - 2$

b) $y = -2(x - 3)^2(x - 1)$

c) $y = (x - 1)^3(x + 2)^2(x - 4)$

3. Aşağıdaki fonksiyonların eksenleri kesim noktaları nedir?

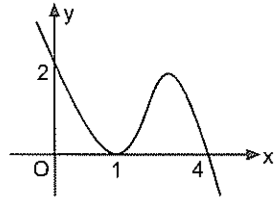
a) $y = (x+1)(x-2)^2$

b) $y = -2x^2(3-x)^3$

c) $y = \left(x^2-9\right)(x+2)$

d) $y = \frac{-3}{4}\left(x^2-1\right)(x+4)$

4.



Şekilde grafiği verilen fonksiyon aşağıdakilerden hangisidir?

A) $y = (x+1)(x-4)^2$

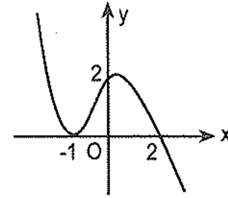
B) $y = (x-1)^2(x-4)$

C) $y = (x-1)(x-4)^2$

D) $y = \frac{1}{2}(x-1)^2(x-4)$

E) $y = -\frac{1}{2}(x-1)^2(x-4)$

5.



Şekilde grafiği verilen fonksiyon aşağıdakilerden hangisidir?

A) $y = \frac{1}{2}(x-1)(x-2)^2$

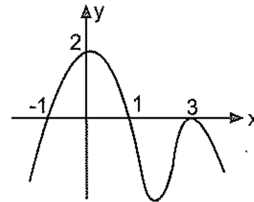
B) $y = (x-1)^2(x-2)$

C) $y = (x+1)^2(x-2)$

D) $y = \frac{-1}{2}(x+1)^2(x-4)$

E) $y = (x+1)^2(2-x)$

6.



Şekilde grafiği verilen fonksiyon aşağıdakilerden hangisidir?

A) $y = \left(x^2-1\right)(x-3)$

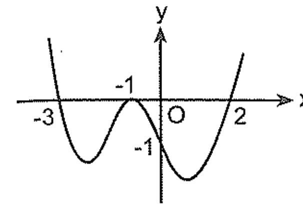
B) $y = \left(x^2-1\right)^2(x-3)$

C) $y = \frac{-1}{3}\left(x^2-1\right)(x-3)^2$

D) $y = \frac{-2}{9}\left(x^2-1\right)(x-3)^2$

E) $y = \frac{2}{3}(x-1)^2(x-3)$

1.



Şekilde grafiği verilen fonksiyon aşağıdakilerden hangisidir?

A) $y = (x-3)(x+1)^2(x+2)$

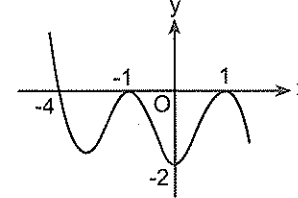
B) $y = \frac{1}{6}\left(x^2+x-6\right)(x+1)^2$

C) $y = \frac{-1}{6}(x-1)^2(x+3)(x-2)$

D) $y = \frac{-1}{6}\left(x^2+x-6\right)(x+1)^2$

E) $y = \frac{-1}{3}\left(x^2+x-6\right)(x-1)^2$

2.



Şekilde grafiği verilen fonksiyon aşağıdakilerden hangisidir?

A) $y = -2\left(x^2-1\right)^2$

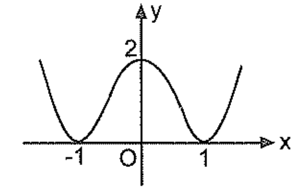
B) $y = -\frac{1}{2}\left(x^2-1\right)^2(x+4)$

C) $y = -2\left(x^2-1\right)^2(x+4)$

D) $y = -\frac{1}{2}(x-1)^2(x+4)$

E) $y = \frac{1}{2}\left(x^2-1\right)(x+4)$

3.



Şekilde grafiği verilen fonksiyon aşağıdakilerden hangisidir?

A) $y = -2\left(x^2-1\right)$

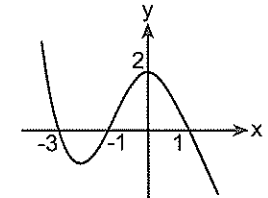
B) $y = (x-1)^2(x+1)$

C) $y = 2\left(x^2-1\right)(x-2)$

D) $y = 2\left(x^2-1\right)^2$

E) $y = -4\left(x^2-1\right)^2$

4.



Şekilde grafiği verilen $f(x)$ fonksiyonu aşağıdakilerden hangisidir?

A) $f(x) = (x^2-1)(x+3)$

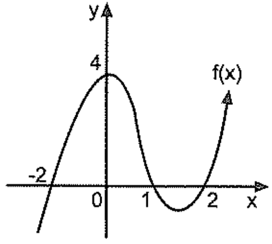
B) $f(x) = \frac{2}{3}(x^2-1)(x-3)$

C) $f(x) = \frac{2}{3}(1-x^2)(x+3)$

D) $f(x) = (x^2-9)(x+1)$

E) $f(x) = \frac{2}{3}(x^2-1)(x+3)$

5.



Şekilde grafiği verilen f(x) fonksiyonu aşağıdakilerden hangisidir?

A) $f(x) = (x^2 - 1)(x - 2)$

B) $f(x) = (x^2 - 1)^2(x - 2)$

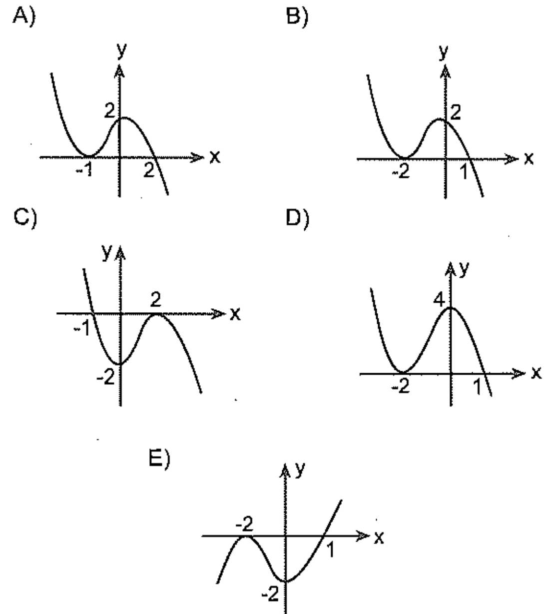
C) $f(x) = (x^2 - 4)(x - 1)$

D) $f(x) = (x^2 - 1)(x - 4)$

E) $f(x) = (x^2 - 2)(x^2 - 1)$

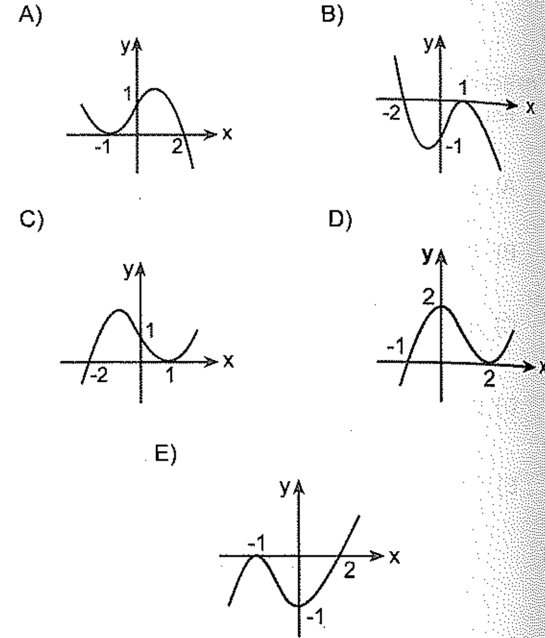
6. $f(x) = \frac{-1}{2}(x+2)^2(x-1)$

fonksiyonunun grafiği aşağıdakilerden hangisi olabilir?



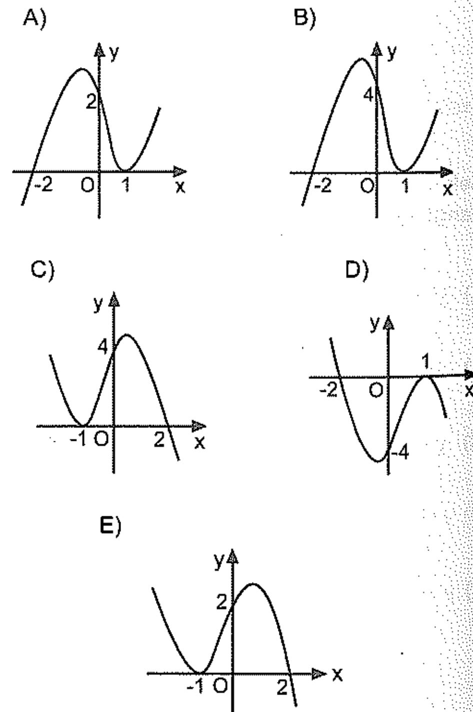
7. $y = \frac{1}{2}(x-1)^2(x+2)$

fonksiyonunun grafiği aşağıdakilerden hangisidir?



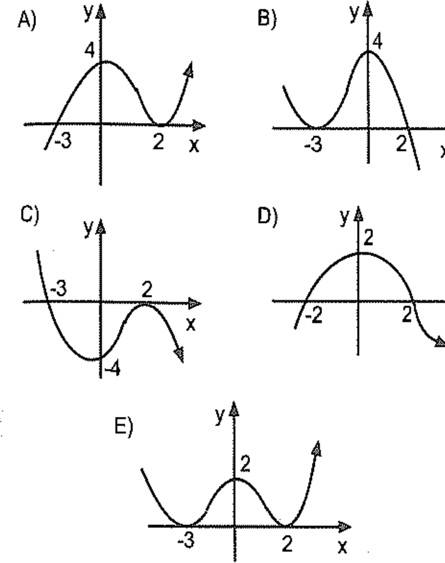
8. $f(x) = 2(x-1)^2(x+2)$

fonksiyonunun grafiği aşağıdakilerden hangisi olabilir?

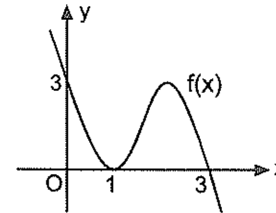


1. $y = \frac{1}{3}(x-2)^2(x+3)$

fonksiyonunun grafiği aşağıdakilerden hangisidir?



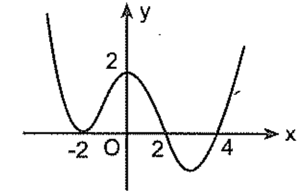
2.



Yukarıda $f(x) = k(x-a)^2(x-b)$ fonksiyonunun grafiği verilmiştir.

Buna göre, a + b + k toplamı kaçtır?

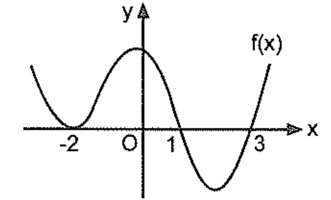
3.



Yukarıda $y = k(x+a)^2(x-b)(x-c)$ fonksiyonunun grafiği verilmiştir.

Buna göre, a + b + c toplamı kaçtır?

4.



Yukarıda $y = (x-a)(x-b)(x+c)^2$ fonksiyonunun grafiği verilmiştir.

Buna göre, a + b + c toplamı kaçtır?

Şu ana kadar gördüğünüz gibi türev bilgisi hiç kullanmadık. Ama türev bilgisine ihtiyaç duyulan sorular da olabilir.
Türev bilgisi fonksiyon grafiklerinde yerel ekstremum noktaları (tepecik ve çukurcukları) bulurken bir de büküm noktasını bulurken lâzım olabilir. Ama genellikle test sorularının çoğunda türev bilgisine gerek kalmaz.

Rasyonel Fonksiyonların Grafiği

$y=\frac{2x-4}{x+1}$ $y=\frac{x^2}{x-2}$ gibi rasyonel fonksiyonların grafiğiyle ilgili test sorularını çözerken de işinize yarayacak bir iki şey var. Ve soruları doğru çözmek için bunlar yeterli.

- **Eksenleri kesim noktalarına bakın.**

x = 0 için y eksenini, y = 0 için de x eksenini kesim noktaları bulunur.
Genel olarak ifade edeyim.

x = a da keser   x = b de teğet

$$y=\frac{(x-a)(x-b)^2}{Q(x)}$$

Yani, payın tek katlı köklerinde eğri x eksenini kesiyor, çift katlı köklerinde ise x eksenine teğet oluyor. Burası önemli işte.

- **Asimptotları bulun.**

Asimptot olayı sizin için yeni bir kavram. Ama sıkıntı etmenize gerek yok. Çünkü zor bi şey değil.
Asimptot, fonksiyon grafiğine sonsuzda teğet olan doğrudur. (ya da eğri) Rasyonel fonksiyonlarda olur. Polinom fonksiyonlarda böyle bi şey yoktu.☺

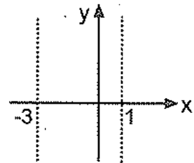
Düşey asimptot

P(x) ve Q(x) sadeleşmeyen iki fonksiyon olmak üzere, $f(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}$ fonksiyonunda Q(x) = 0 eşitliğini sağlayan x değerlerinde düşey asimptot vardır.

Örneğin,

$$f(x)=\frac{x^2-4}{(x-1)(x+3)}$$

fonksiyonunun düşey asimptotları paydayı sıfır yapan x = 1 ve x = – 3 doğrularıdır. Asimptotlar grafikte kesikli çizgiyle gösterilir.
Nasıl diye merek ediyorsanız aşağı bakın.☺



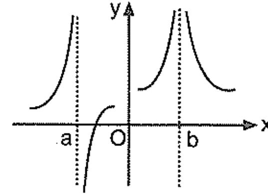
Ayrıca önemli bir husus da şu:
Eğri paydanın çift katlı (tam kare) köklerinde BACA, tek katlı köklerinde KELEBEK oluşturur. Bakalım siz de baca ve kelebeği görebilecek misiniz?☺

Genel olarak

$$y=\frac{P(x)}{(x-a)(x-b)^2}$$

x = a da KELEBEK   x = b de BACA

Fonksiyonunun grafiği taslak olarak (yani, öylesine çizersem) şöyle olabilir.



Burada şuna dikkat edin. Şekildeki eğri de **kelebek** olan asimptotta yani x = a da eğri asimptotun sağında ve solunda birinde aşağı diğerinde yukarı gider. Baca olan asimptotta ise hem sağ hem de solda ya aşağı ya da yukarı gider. Bu dediklerimi üstteki şekilde görün isterseniz.

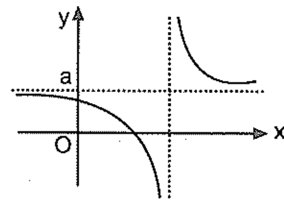
Örneğin,

$$y=\frac{x^2-3x}{(x^2-1)(x-2)^2}$$

Eğrisinin düşey asimptotları $x^2-1=0$ dan x = 1 ile x = – 1 (Bunlarda kelebek var.) doğrularıyla $(x-2)^2=0$ dan x = 2 doğrusudur. (Burada baca var. Çünkü tam kare ifade)
Rasyonel fonksiyonların grafiğiyle ilgili test sorularını çözerken bu kelebek ve baca olayı çook çok önemli. Göreceksiniz.☺

Yatay Asimptot

$f(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}$ fonksiyonunda payın derecesi paydanınkinden küçük ya da eşit olursa eğrinin bir de yatay asimptotu olur. Yatay asimptot $x\to\infty$ için limit değeri neyse ona eşittir.
Yani, $y=\lim\limits_{x\to\mp\infty}f(x)=a$ ise y = a doğrusu fonksiyonun yatay asimptotudur.
Örnek verince daha iyi anlayacaksınız.



Eğri düşey asimptotu kesmez. Ama yatay asimptotu kesebilir.

1. Aşağıdaki fonksiyonların düşey asimptotlarını bulunuz.

a) $f(x)=\frac{2x-3}{x+2}$

b) $f(x)=\frac{x+1}{(x-2)^2(x+3)}$

c) $f(x)=\frac{2}{(x^3+1)(x^2+1)}$

2. Aşağıdaki fonksiyonların yatay ve düşey asimptotlarını bulunuz.

a) $y=\frac{4x+1}{x-2}$

b) $y=\frac{6x^2-x-1}{2x^2-8}$

c) $y=\frac{3x-1}{(x+2)^2}$

d) $y=\frac{x^3+1}{(x-1)^2(x+2)}$

3. $y=\frac{(m+2)x+1}{2x-3}$

eğrisinin yatay asimptotu y = 3 doğrusu olduğuna göre, m kaçtır?

4. $y=\frac{3x+1}{x-2}$

eğrisinin asimptotlarının kesim noktasının koordinatları nedir?

5. $y=\frac{3x-6}{x+1}$

eğrisinin asimptotlarının kesim noktasının koordinatları nedir?

6. $y=\frac{mx-1}{nx-2}$

eğrisinin asimptotlarının kesim noktasının kordinatları (2, 3) olduğuna göre, m + n toplamı kaçtır?

Şu da lâzım olabilir. Aklınızda olsun.

$y=\frac{ax+b}{cx+d}$ biçimindeki fonksiyonların asimptotlarının kesim noktası eğrinin simetri merkezidir.

7. $y=\frac{ax-2}{bx+1}$

eğrisinin simetri merkezi (1, –3) olduğuna göre, a.b çarpımı kaçtır?

Eğik ve Eğri Asimptotlar

Çok lâzım olmayacak belki. Ama yine de bilmek gerekiyor.☺

$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ fonksiyonunda payın derecesi paydanın derecesinden 1 fazla ise eğik, 2 veya daha fazla fazla☺ ise eğri asimptot vardır.

Eğik ya da eğri fark etmiyor. İkisi de aynı şekilde bulunur. Eğik veya eğri asimptotu bulurken payı paydaya bölün. (polinom bölmesi)ve bölüm sonucunu bulun. Diyelim ki bölüm sonucu B(x) olsun. Bu durumda y = B(x) eğik (eğri) asimptottur.

Örnek Soru

$$y = \frac{x^2+2}{x-1}$$

eğrisinin eğik asimptotunun denklemi nedir?

Çözelim☺

Eğik veya eğri asimptotu bulurken pay paydaya bölünür. Bölün bakalım.
Böldünüz mü?
Bölüm sonucu x + 1 i buldunuz mu?
Bulduysanız bu işi hallettiniz demektir.
Demek ki y = x + 1 doğrusu bu eğrinin eğik asimptotu oluyor.
Anlaşıldı mı şimdi?

8. Aşağıdaki fonksiyonların asimptotlarını bulunuz.

a) $y = \frac{x^2+1}{x-2}$

b) $y = \frac{x^3+2x-1}{x^2-9}$

c) $y = \frac{x^3}{x+2}$

d) $y = \frac{x^3+2x^2-1}{x+2}$

9. $y = \frac{x^2}{x-3}$

eğrisinin asimptotlarının kesim noktasının koordinatları nedir?

10. $y = \frac{2x^2}{x+1}$

eğrisinin asimptotlarının kesim noktasının ordinatı kaçtır?

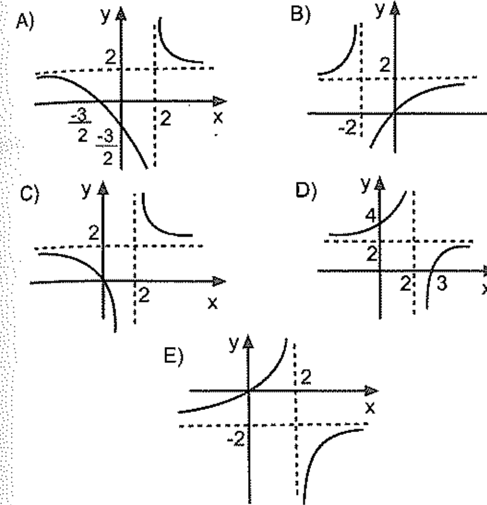
10. $y = \frac{x^3-4x}{x-1}$

fonksiyonunun asimptotlarının kesim noktasının koordinatları toplamı kaçtır?

Olayı özetleyelim.
Rasyonel fonksiyonların grafikleriyle ilgili test sorularını çözerken,
Asimptotlara bakın. (Düşey asimptotta baca, kelebek olayına dikkat edin.)
Eksenleri kesim noktalarını bulun. (Payın çift katlı köklerinde eğrinin x e teğet olduğuna dikkat edin.)
Genelde gerek kalmaz. Ama gerek olursa fonksiyonun artan azalan olduğu aralıklar ile ekstremum ve büküm noktalarına bakın.

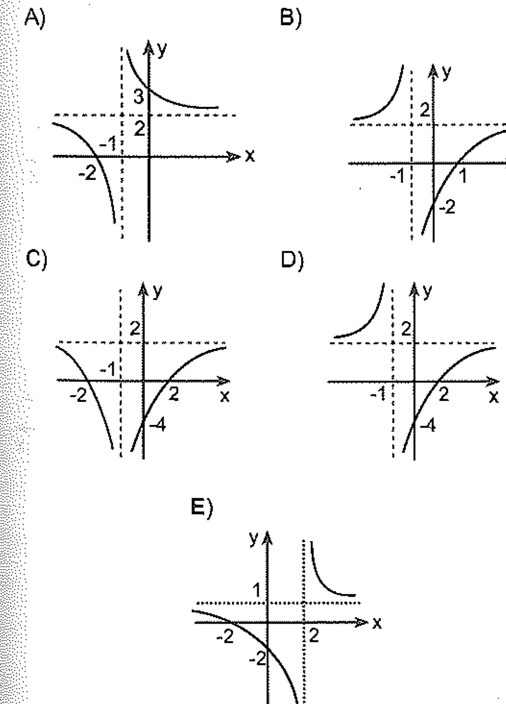
1. $y = \frac{2x+3}{x-2}$

eğrisinin grafiği aşağıdakilerden hangisidir?



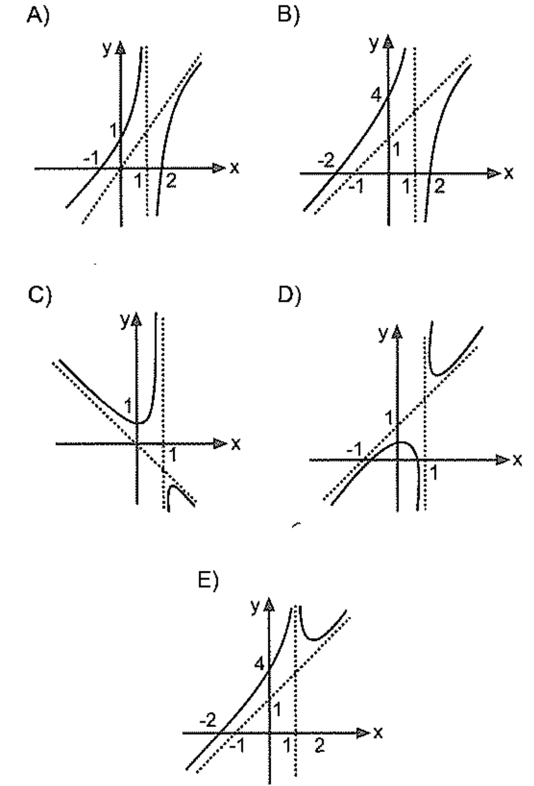
2. $y = \frac{2x-4}{x+1}$

eğrisinin grafiği aşağıdakilerden hangisidir?

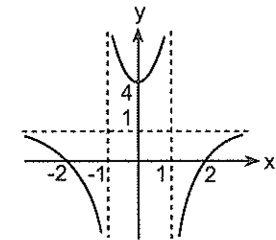


3. $y = \frac{x^2-4}{x-1}$

fonksiyonunun grafiği aşağıdakilerden hangisidir?



4.



Şekilde grafiği verilen fonksiyon aşağıdakilerden hangisi olabilir?

A) $y = \frac{x^2-1}{x-2}$

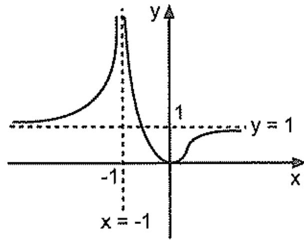
B) $y = \frac{x^2-4}{x^2-1}$

C) $y = \frac{x^2-1}{x^2-4}$

D) $y = \frac{x^2}{(x-1)^2}$

E) $y = \frac{x^2+4}{x^2-1}$

5.



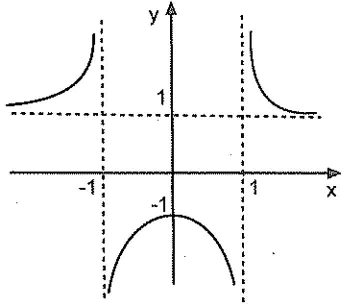
Şekilde grafiği verilen fonksiyonun denklemi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $y = \frac{x^2}{(x+1)^2}$ B) $y = \frac{x^2}{(x-1)^2}$

C) $y = \frac{x^3}{x+1}$ D) $y = \frac{x^2}{x+1}$

E) $y = \frac{(x+1)^2}{x^2}$

5.



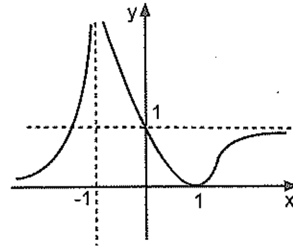
Şekilde grafiği verilen fonksiyon aşağıdakilerden hangisi olabilir?

A) $y = \frac{x^2-2}{x-2}$ B) $y = \frac{x^2-4}{x-1}$

C) $y = \frac{x^2-9}{x-4}$ D) $y = \frac{x^2-8}{x+8}$

E) $y = \frac{x^2+1}{x^2-1}$

7.



Şekilde grafiği verilen fonksiyon aşağıdakilerden hangisidir?

A) $y = \frac{x^2-1}{(x+1)^2}$ B) $y = \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^2$

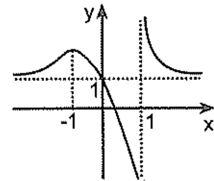
C) $y = \frac{x^2-1}{x^2-4}$ D) $y = \frac{x-2}{(x+1)^2}$

E) $y = \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^2$

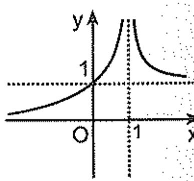
8. $y = \frac{x^2+1}{x^2-2x+1}$

eğrisinin grafiği aşağıdakilerden hangisidir?

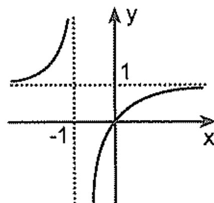
A)



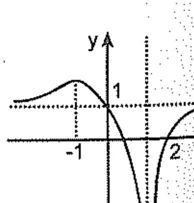
B)



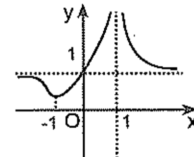
C)



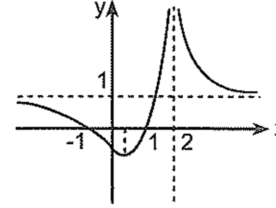
D)



E)



1.



Şekilde grafiği verilen fonksiyonun denklemi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $y = \frac{x^2}{(x-2)^2}$ B) $y = \frac{x^2+x-2}{(x-2)^2}$

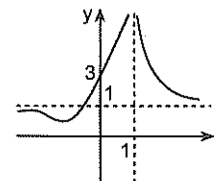
C) $y = \frac{x^2-1}{(x-2)^2}$ D) $y = \frac{x^2-1}{x-2}$

E) $y = \frac{(x-1)^2}{x^2-4}$

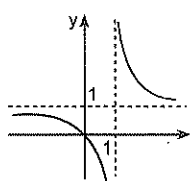
2. $y = \frac{x^2+3}{(x-1)^2}$

eğrisinin grafiği aşağıdakilerden hangisidir?

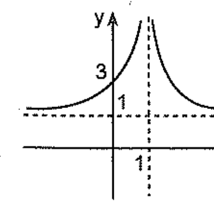
A)



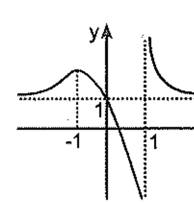
B)



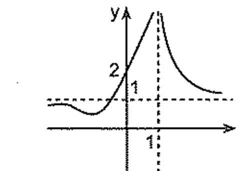
C)



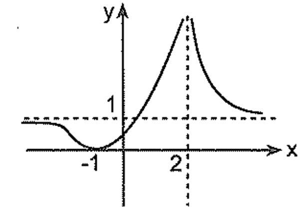
D)



E)



3.



Şekilde grafiği verilen fonksiyon aşağıdakilerden hangisidir?

A) $y = \frac{x^2-1}{(x-2)^2}$ B) $y = \left(\frac{x+1}{x-2}\right)^2$

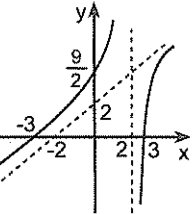
C) $y = \left(\frac{x-1}{x+2}\right)^2$ D) $y = \frac{x^2+1}{(x-2)^2}$

E) $y = \left(\frac{x-2}{x-1}\right)^2$

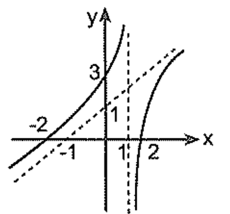
4. $y = \frac{x^2-9}{x-2}$

fonksiyonunun grafiği aşağıdakilerden hangisidir?

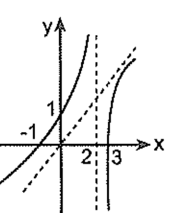
A)



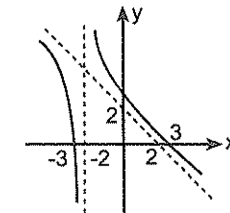
B)



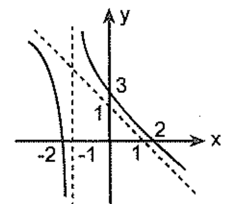
C)



D)



E)



Bir kitap bir aynadır. Ona bir eşek bakacak olursa karşısında elbette bir evliya görmez.
Goergo C.Lichtenberg

Dünyada bir çok kabiliyetli kişiler, küçük bir cesaret sahibi olmadıkları için kaybolurlar.
Sydney Smit

Düşünceli olun, çünkü karşılaştığınız herkes inanın en az sizin kadar zorlu bir mücadele veriyor.
Plato

Mevcut bilgi birikimimizle öyle sorunlar yaratırız ki aynı birikimimiz bu sorunları çözmemize yetmez.
A. Einstein

Belirsiz integral

Zor bir iş, zamanında yapmamız gerekip de yapmadığımız kolay şeylerin birikmesiyle oluşur.

Henry Ford

Plansız çalışan kimse, ülke ülke dolaşıp hazine arayan bir insana benzer.

Descartes

İNTEGRAL

Türev alma kurallarını bilenler için kolay bir konu. Onun için türev alma kurallarından unuttuklarınız varsa tekrar hatırlayarak başlasanız hiç de fena olmaz. Kesinlikle türevden daha kolay bir konu. Yeter ki adam gibi çalışın.☺

Türev alma işleminin tersi olan bir işlem integral alma. Ya da şöyle söyleyeyim.

İntegral, türevi belli olan fonksiyonu bulma işlemidir.

Burada size bi belirli bi de belirsiz integral diye iki integralden bahsetcem.

Belirsiz İntegral

İntegralin şekli şu: $\int$

Şimdiki olayımız bu sembole yüklenen anlam. Ama önce şunları bi dinleyin bakalım.

f(x) = sinx fonksiyonunun türevi cosx idi öyle değil mi? Bunu biliyorsunuz.

Şimdi size "Neyin türevi cosx tir?" diye sorsam hemen sinx in diyemez misiniz?☺

Eğer diyebiliyorsanız $\int \cos x\,dx = \sin x + c$ olduğunu da biliyorsunuz demektir.

İşte buradaki olay bu. Yani, türevi verilmiş olan fonksiyonu bulma olayı.

İsterseniz bunu daha genel ifade edeyim.

f(x) fonksiyonunun türevi f '(x) olsun diyelim. O zaman türevi f '(x) olan fonksiyonun belirsiz integrali f(x) tir.

Biliyorum. Anlar gibi oldunuz. Amma...☺

Örnek vereyim.

$f(x)=e^x$ in türevi $f'(x)=e^x$ olduğunu biliyorsanız.

$\int e^x\,dx = e^x + c$ söyleyebilirsiniz

Veya $f(x) = x^3$ ün türevi $f'(x) = 3x^2$ olduğunu biliyorsanız $\int 3x^2\,dx = x^3 + c$ olduğunu da söyleyebilirsiniz.

Başka bir örnek daha vereyim.

f(x) = lnx in türevi $y'=\frac{1}{x}$ olduğunu biliyorsanız.

$\int \frac{1}{x}dx = \ln x + c$ olduğunu da söyleyebilirsiniz.

Anlaşıldı mı?

Biliyorum. Şu **dx** ler **c** ler de neyin nesi diyorsunuz.

Onları da söyleyeyim.

Önce c den bahsedeyim. Ama önce size çok basit bir soru.

Aşağıdaki fonksiyonların türevi nedir?

$y=x^3,\ y=x^3+2,\ y=x^3-5,\ y=x^3+61, \ldots$

Şimdi de şuna cevap verin.

Hangi fonksiyonunun türevi $3x^2$ dir. ☺

Biliyorum. $y=x^3+\ldots$ gibi bir şey diyorsunuz.

İşte gördünüz. Türevi $3x^2$ olan bir sürü fonksiyon var ve bunların hepsi de x^3 lüdür. Ama ya yanındaki sayı. İşte onu bilmeniz imkânsız.

Onun için bilemediğiniz o sayılara ayıp olmasın diye hepsini temsilen **c** (integral sabiti) kullanılır.

Dolayısıyla $\int 3x^2dx = x^3 + c$ olur ki buradaki c reel sayısına **integral sabiti** diyoruz. Ve bütün belirsiz integrallerde muhakkak ki bir c sabiti vardır. Bilginiz olsun. Yani, c siz belirsiz integral sonucu olmaz.

Gelelim dx olayına.

Hatırlayın. Türevde de vardı.

$\frac{d[f(x)]}{dx} = f'(x)$ idi. İşte buradaki dx.

Takip edin beni☺

Bu eşitlikten d[f(x)] = f '(x)dx yazılmış. Bu kadar. Gerisi kolay☺

$$\int d(f(x)) = \int f'(x)dx = f(x)+c$$

Şimdi olayı biraz daha netleştireyim. Aslında sabahtan beri anlatmaya çalıştığım şeyin özeti şu.

integrali

$$\int f'(x)dx = f(x)+c$$

türevi

Nasıl özet ama☺

Örnek Soru

$$\int x\cdot f(x)dx = x^5 + 2x^3$$

olduğuna göre f(x) in eşiti nedir?

Çözelim☺
Eşitliğin sağ tarafının türevi integral işareti ile dx arasındaki ifadeye yani, x.f(x) e eşit olacak. Onun için sağ tarafın türevini alırsanız

$xf(x) = 5x^4 + 6x^2$ bulursunuz. Ve buradan da

$f(x) = 5x^3 + 6x$ yi elde edersiniz artık☺.

Nasıl amma?☺

Şunu biraz daha açayım.

$\int d(f(x)) = \int f'(x)dx = f(x) + c$

Örnek vereyim.

$\int d(\sin x) = \int \cos x dx = \sin x + c$

$\int d(x^2e^x + 2) = x^2e^x + c$ dir.

Var mı bi zorluğu?☺

Aynı mantıkla şunları yapın bakalım.

1. $\int d(x^3 + 5x^2 + 2)$

2. $\int d(x^2 + \tan x)$

3. $\int d\left(\frac{\tan x}{x^2+1}\right)$

4. $\int d(x - 2\ln x)$

5. $\int d(e^x \cos x)$

6. $\int d\left(\frac{f(x)}{x}\right)$

7. $\int d(x \cdot \sqrt{3x-2})$

8. $\int d(\arcsin(x+1))$

Peki, bir fonksiyonun önce integralini sonra da türevini alsanız?
Ne olacak. Aynı fonksiyonu elde edersiniz.

Örneğin

$\frac{d}{dx}\int (x^2 - x \cdot \sin x)dx = x^2 - x \cdot \sin x$ tir.

$\frac{d}{dx}\int (x \cdot e^x)dx = x \cdot e^x$

$\frac{d}{dx}\int (x^2 \cdot f(x))dx = x^2 \cdot f(x)$

Şunları da siz yapın☺

9. $\frac{d}{dx}\int (x \cdot \tan\sqrt{x})dx$

10. $\frac{d}{dx}\int \left(\frac{e^x}{\ln x}\right)dx$

11. $\frac{d}{dx}\int (x^2 + f(2x-1))dx$

12. $\frac{d}{dx}\int \left(\frac{2x-3}{x+5}\right)dx$

Türev alma kurallarını unutanlar için. Burada lâzım olacak olanları yazayım. Biliyorsanız sıkıntı yok. Geçebilirsiniz☺

$y = e^x$ ise $y = e^x$

$y = \ln x$ ise $y' = \frac{1}{x}$

$y = \sin x$ ise $y' = \cos x$

$y = \cos x$ ise $y' = -\sin x$

$y = \tan x$ ise $y' = 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$

$y = \cot x$ ise $y' = -(1 + \cot^2 x) = -\frac{1}{\sin^2 x}$

$y = \arcsin x$ ise $y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$y = \arctan x$ ise $y' = \frac{1}{1+x^2}$

1. $\int f(x)dx = x^4 + 2x^2 + 3x$

olduğuna göre, f(x) in eşiti nedir?

2. $\int f(x)dx = \frac{e^{2x}}{2} + x$

olduğuna göre, f(x) in eşiti nedir?

3. $\int \frac{f(x)}{x}dx = 2\sin x + c$

olduğuna göre, f(x) in eşiti nedir?

4. $\int (f(x) + x^2)dx = x^3 + 2x^2$

olduğuna göre, f '(2) değeri kaçtır?

5. $\int (f(x) + x)dx = x^4 + 3x^2$

olduğuna göre, f(2) değeri kaçtır?

6. $\int f(x)dx = x^3 + 2x + c$

olduğuna göre, f fonksiyonunun x = 1 apsisli noktasındaki teğetinin eğimi kaçtır?

7. $f(x) = \int (x^2 + 2x - 5)dx$

olduğuna göre, f '(x) in eşiti nedir?

8. $f(x) = \int (x^2 - 6x + 8)dx$

olduğuna göre, f fonksiyonunun x = 3 apsisli noktasındaki teğetinin eğimi kaçtır?

9. $\int xf(x)dx = 3x^4 + 3x^2$

olduğuna göre, f fonksiyonunun yerel ekstremum noktasının apsisi kaçtır?

10. $f(x) = \int \left(x^2 + 2x - 5\right)dx$

olduğuna göre, f fonksiyonunun dönüm (büküm) noktasının apsisi kaçtır?

11. $\frac{d}{dx}\int (\cos x - \sin x)\,dx$

ifadesinin eşiti nedir?

12. $\frac{d}{dx}\int \left(e^x + \frac{1}{x}\right)dx$

ifadesinin eşiti nedir?

13. $\frac{d}{dx}\int \left(x^5 + 2x^2\right)dx$

ifadesinin eşiti nedir?

14. $\frac{d}{dx}\int \left(e^x + \ln x\right)dx$

ifadesinin eşiti nedir?

15. $\frac{d}{dx}\int \frac{1}{1+x^2}dx$

ifadesinin eşiti nedir?

16. $f(x) = \frac{d}{dx}\int \left(1 + \tan^2 x\right)dx$

olduğuna göre, $f\left(\frac{\pi}{3}\right)$ **değeri kaçtır?**

İntegral Alma Kuralları

İntegral, türevin tersi bir işlem olduğuna göre, türevi verilen fonksiyonu tahmin ederek☺ bu işi halledebilirsiniz.

Belki de en fazla karşılaşacağınız kural şu

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c \quad (n \neq -1 \text{ için})$$

Yani, **üs artıyor ve bölüm olarak geliyor.**

1. $\int x^4 dx$

2. $\int 6x^2 dx$

3. $\int 3x^5 dx$

4. $\int 3x^{-4} dx$

5. $\int 5y\,dy$

6. $\int 3dx$

7. $\int dx$

8. $\int 3u^2 du$

9. $\int \frac{3x^3}{2}dx$

10. $\int \frac{u\,du}{3}$

Bazen üs ve kök bilgisine ihtiyacınız olabilir☺

$\frac{1}{x^n} = x^{-n}$ ve $\sqrt[n]{x^m} = x^{\frac{m}{n}}$ olarak yazılabiliyordu. m ve n yi kaç verirlerse siz de ona göre yazarsınız artık☺

11. $\int \frac{dx}{x^2}$

12. $\int \sqrt{x}\,dx$

13. $\int 6\sqrt[3]{x}\,dx$

14. $\int \sqrt[3]{x^2}\,dx$

15. $\int \frac{2}{\sqrt{x}}dx$

16. $\int \left(x^2 + 2x - 3\right)dx$

17. $\int \left(\frac{x^8}{4} - 3x^3 + 2x - 5\right) dx$

Çarpma bölme filan varsa önce onları halledin.☺

18. $\int (x-1)(x+1)dx$

19. $\int (x+1)(x^2 - x + 1)dx$

20. $\int x(\sqrt{x} + 2)dx$

21. $\int \frac{x^3+2}{x^2} dx$

22. $\int \frac{3x+2}{\sqrt{x}} dx$

23. $\int \frac{x^2-2x}{x} dx$

24. $\int \frac{x^2-2x-3}{x+1} dx$

25. $\int \frac{x^3-1}{x^2+x+1} dx$

26. $\int 3dx + \int 2dy$

27. $\int 3x^2dx + \int 4y^3dy$

28. $\int 10u^5du - \int 6x^2dx$

Bir fonksiyonun türevi belli iken aslını (türev alınmadan önceki halini) bulmak istiyorsanız integralini almanız lâzım. Örnek üzerinde izah edeyim.

Örnek Soru

$f''(x) = 6x + 2$ olmak üzere,

$f'(1) = 4$ **ve f(0) = 2 olduğuna göre, f(1) kaçtır?**

Çözelim☺

Fonksiyonun ikinci türevi verilmiş. Ama istenen f(1). Yani, fonksiyonun kendisi lâzım bize. Bunu da ancak türevi alınmadan önceki halini bularak yani integralini alarak elde edebiliriz.

Peki, bulalım bakalım. Nelerle karşılaşacaz.

İkinci türevin integrali bize birinci türevi verir.

$\int (6x+2)dx = f'(x)$ tir. Buradan $f'(x) = 3x^2 + 2x + c_1$ diyebilirsiniz. Di mi?

Buradaki c_1 i bulmak için verilen $f'(1) = 4$ eşitliğini kullanmak lâzım. Zaten başka türlü de bulamazsınız.☺ $c_1 = -1$ i buldunuz mu?

Artık f fonksiyonunun birinci türevini biliyorsunuz. Ama bize f nin kendisi lâzımdı. Onun için hiç üşenmeden bunun da integralini alıp f nin kendisini bulmanız lâzım.

Bulalım. $\int (3x^2 + 2x - 1) dx = x^3 + x^2 - x + c_2$ İşte bu bize lâzım olan f(x) fonksiyonudur. Ama burada da bir c olayı var. Onu da f(0) = 2 eşitliğini kullanarak bulcaz. Bulalım. $c_2 = 2$ dir.

Artık sonunda f(x) i yazabilir ve sonra da f(1) i bulabilirsiniz.

$f(x) = x^3 + x^2 - x + 2$ den f(1) = 3 tür.

Biraz uzun. Ama yapacak başka bir şey yok☹

1. $f'(x) = 4x + 2$

$f(1) = 2$

olduğuna göre, f(0) kaçtır?

2. $f'(x) = 3x^2 + 2x + 1$

$f(1) = 7$

olduğuna göre, f(0) kaçtır?

3. f fonksiyonunun grafiği A(2,6) noktasından geçmektedir.

$f'(x) = 3x^2 + 2$ **olduğuna göre, f(1) kaçtır?**

4. $f''(x) = 3x^2 - 1$

$f'(2) = 8$

olduğuna göre, f '(1) kaçtır?

5. $f''(x) = 6x + 2$

$f'(1) = f(1) = 6$

olduğuna göre, f(0) kaçtır?

6. $f''(x)=12x$

$f'(1)=0$

$f(-1)=10$

olduğuna göre, f(0) kaçtır?

Aslında belirli integralin ne demek olduğunu da verip devam edersem daha mantıklı olacak. Dinleyin bakalım. Kesinlikle daha mantıklı ve faydalı.

İntegral işaretinin altına ve üstüne sayı yazılırsa yani, integralde sınırlar verilirse ne yapmanız lâzım? Ondan bahsedeyim. Tabii ki örnek üzerinde☺

Örnek Soru

$\int_1^2 3x^2dx$ **belirli integralinin değeri kaçtır?**

Çözelim☺

Bu gibi bir soruda ilk önce sınırlar yokmuş gibi düşünerek integralin eşitini bulun.

$\int 3x^2dx = x^3+c$ idi. Ama burada c yi yazmayın. Nedenini daha sonra izah ederim☺

Daha sonra da şunu yapın.

$\int_1^2 3x^2dx = x^3\Big|_1^2 = 2^3-1^3=7$ yani, bulduğunuz ifade de önce üstteki sayıyı (üst sınırı) sonra da alttaki sayıyı (alt sınırı) yazın ve farkını alın.

Bunu genel olarak şöyle ifade edelim.☺

$\int_a^b f'(x)dx = f(x)\Big|_a^b = f(b)-f(a)$

Anlaşıldı mı?

Bu kadarcık bir şeyi de yaparsınız artık☺

7. $\int_{-2}^{4} 3dx$

integralinin değeri kaçtır?

8. $\int_0^2 (4x-3)dx$

integralinin değeri kaçtır?

9. $\int_0^1 (x^2-1)dx$

integralinin değeri kaçtır?

10. $\int_{-1}^{1} \left(6x^2-2x\right) dx$

integralinin değeri kaçtır?

Aşağıdaki integrallerin neye eşit olduğunu verilen ifadelerin hangi fonksiyonun türevi olduklarını düşünerek bulabilirsiniz.

$\int \frac{1}{x}dx = \ln x + c$

$\int e^x dx = e^x + c$

$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$

$\int \cos x\, dx = \sin x + c$

$\int \sin x\, dx = -\cos x + c$

$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \int \left(1+\tan^2 x\right)dx = \tan x + c$

$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = \int \left(1+\cot^2 x\right)dx = -\cot x + c$

$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + c = -\arccos x + c$

$\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x + c = -\text{arccot}\, x + c$

1. $\int \left(\frac{4}{x}+2\right)dx$

integralinin eşiti nedir?

2. $\int \left(3e^x+2\right)dx$

integralinin eşiti nedir?

3. $\int \left(\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2 dx$

integralinin eşiti nedir?

4. $\int \frac{(x^2+3x)dx}{x}$

integralinin eşiti nedir?

5. $\int_2^4 \left(4x+\frac{1}{x}\right) dx$

integralinin değeri kaçtır?

6. $\int_1^2 \left(3x^2+\frac{1}{x}\right) dx$

integralinin değeri kaçtır?

7. $\int (2\cos x - \sin x)\, dx$

integralinin eşiti nedir?

8. $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} (2\cos x - \sin x)dx$

integralinin değeri kaçtır?

9. $\int (4\sin u - 3)du$

integralinin eşiti nedir?

10. $\int (2+\cos x)dx$

integralinin eşiti nedir?

11. $\int_{0}^{\pi} (2+\sin x)dx$

integralinin değeri kaçtır?

12. $\int \left(3x^2 + 2\sin x\right)dx$

integralinin eşiti nedir?

13. $\int \left(e^x + x^2\right)dx$

integralinin eşiti nedir?

14. $\int \left(e^x - \frac{2}{x}\right)dx$

integralinin eşiti nedir?

15. $\int_{0}^{1} \left(x+e^x\right) dx$

integralinin değeri kaçtır?

16. $\int \left(3x^2 - \frac{5}{x}\right)dx$

integralinin eşiti nedir?

17. $\int \left(2x - e^x + 1\right)dx$

integralinin eşiti nedir?

1. $\int (3\cos x + \sin x)dx$

integralinin eşiti nedir?

2. $\int \sin\left(\frac{3\pi}{2} - x\right)dx$

integralinin eşiti nedir?

3. $\int \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right)dx$

integralinin eşiti nedir?

4. $\int_{0}^{\frac{\pi}{6}} \cos\left(\frac{3\pi}{2} + x\right)dx$

integralinin değeri kaçtır?

5. $\int \left(\sin\frac{x}{2} - \cos\frac{x}{2}\right)^2 dx$

integralinin eşiti nedir?

6. $\int \frac{\sin 2x\, dx}{\cos x}$

integralinin eşiti nedir?

7. $\int \left(\cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2}\right)dx$

integralinin eşiti nedir?

8. $\int 2\left(1+\tan^2 x\right)dx$

integralinin eşiti nedir?

9. $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \left(2+\tan^2 x\right)dx$

integralinin değeri kaçtır?

10. $\int \left(1+\cot^2 x\right) dx$

integralinin eşiti nedir?

11. $\int\left(2-\tan^2 x\right)dx$

integralinin eşiti nedir?

12. $\int\left(\cos^4\frac{x}{2}-\sin^4\frac{x}{2}\right)dx$

integralinin eşiti nedir?

13. $\int\left(\cos\frac{u}{2}\sin\frac{u}{2}\right)du$

integralinin eşiti nedir?

14. $\int\left(3x^2+\cos x\right)dx$

integralinin eşiti nedir?

15. $\int\left(3e^x-\frac{2}{x}+\cos x\right)dx$

integralinin eşiti nedir?

16. $\int 2^x\cdot\ln 2dx$

integralinin eşiti nedir?

17. $\int\frac{2dx}{\sqrt{1-x^2}}$

integralinin eşiti nedir?

18. $\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{6}{\sqrt{1-x^2}}dx$

integralinin değeri kaçtır?

19. $\int\frac{dx}{2+2x^2}$

integralinin eşiti nedir?

20. $\int_0^1\frac{8}{1+x^2}dx$

integralinin değeri kaçtır?

1. $\int\left(1-\frac{2}{1+x^2}\right)dx$

integralinin eşiti nedir?

2. $\int\left(3x^2+2x-\frac{3}{1+x^2}\right)dx$

integralinin eşiti nedir?

3. $\int\frac{2-\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^2}}dx$

integralinin eşiti nedir?

4. $\int\left(3-\tan^2\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\right)dx$

integralinin eşiti nedir?

5. $\int\frac{\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1-x^4}}dx$

integralinin eşiti nedir?

6. $\int\frac{5dx}{\sqrt{4-4x^2}}$

integralinin eşiti nedir?

7. $\int\left(f'(x)\cdot g(x)+g'(x)\cdot f(x)\right)dx$

integralinin eşiti nedir?

8. $\int\left(f(x)+x\cdot f'(x)\right)dx$

integralinin eşiti nedir?

9. $\int\frac{x.f'(x)-f(x)}{x^2}dx$

integralinin eşiti nedir?

10. $\int\frac{f(x)-x\cdot f'(x)}{f^2(x)}dx$

integralinin eşiti nedir?

İNTEGRAL ALMA YÖNTEMLERİ

Şimdiye kadar anlattığım integrallerin sonucunu neyin türevi olduklarını kolaylıkla tahmin edip bulabiliyordunuz.☺ Ama bazı sorularda küçük ayarlara gerek duyulabilir. Verilen ifade üzerinde bir iki ufak değişiklik yapıp daha basit görünümlü bir hale getirebiliriz. Zaten başka işimiz yok. Bir şekilde çözcez artık☺

Değişken Değiştirme Yöntemi

İntegral alma yöntemlerinden en önemlisi budur. Yani, değişken değiştirme yöntemidir.
Ne kadar önemli olduğunu bu yöntemi anladığınızda daha iyi anlayacaksınız.
Ve bir sürü yerde kullanıldığına şahit olacaksınız.
Onun için adam gibi öğrenmek lâzım bunu.

$\int [f(x)]^n \cdot f'(x)\,dx$ biçimindeki integrallerde

$f(x) = u$ derseniz $\frac{d(f(x))}{dx} = f'(x)$ ten $f'(x)\,dx = du$

olur. Bu durumda integral,

$\int u^n\,du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + c$ biçimine gelir.

Bundan sonra ise u yerine değerini yazarsınız..

Örnek Soru

$\int 6x^2(x^3+1)^3\,dx$ **integralinin eşiti nedir?**

Çözelim☺

Bu tür soruların çoğunda üssü alınmış olan parantezin içine u denilerek parantez dışında du aranır.

Bakalım.

$x^3+1 = u$ ise $3x^2dx = du$ olur. (Unutanlar için, fonksiyonun türevi çarpı dx eşittir du idi☺)

Artık integrali u ya bağlı olarak ifade edebilirsiniz.

$$\int 6x^2(x^3+1)^3\,dx = \int 2.(\underbrace{x^3+1}_{u})^3\,\underbrace{3x^2dx}_{du} =$$

$$\int 2u^3du = 2\cdot\frac{u^4}{4} + c = \frac{u^4}{2} + c$$

Artık sonucu u yerine de x^3+1 yazıp $\frac{(x^3+1)^4}{2} + c$ olarak bulursunuz.

11. $\int (x-1)^3\,dx$

integralinin eşiti nedir?

12. $\int 2x(x^2+2)^3\,dx$

integralinin eşiti nedir?

13. $\int (x^2-x+1)^4(2x-1)\,dx$

integralinin eşiti nedir?

14. $\int_0^1 (x+1)^4\,dx$

integralinin değeri kaçtır?

1. $\int_0^1 x(x^2+1)^4\,dx$

integralinin değeri kaçtır?

2. $\int_0^1 x^2(x^3+1)^{\frac{1}{2}}\,dx$

integralinin değeri kaçtır?

3. $\int_0^1 x\cdot\sqrt{x^2+1}\,dx$

integralinin değeri kaçtır?

4. $\int \frac{(\sqrt{x}+2)^3\,dx}{\sqrt{x}}$

integralinin eşiti nedir?

5. $\int \frac{2dx}{(2x+1)^2}$

integralinin eşiti nedir?

6. $\int \frac{6x\,dx}{(x^2-4)^3}$

integralinin eşiti nedir?

7. $\int \frac{x^2\,dx}{(x^3+2)^3}$

integralinin eşiti nedir?

8. $\int \sqrt{x+1}\,dx$

integralinin eşiti nedir?

9. $\int \sqrt{3x-2}\,dx$

integralinin eşiti nedir?

10. $\int \sqrt[3]{(x-2)^2}\,dx$

integralinin eşiti nedir?

11. $\int_0^4 \sqrt{2x+1}\,dx$

integralinin değeri kaçtır?

12. $\int x\sqrt{x^2+1}\,dx$

integralinin eşiti nedir?

13. $\int x\cdot\sqrt[3]{3x^2-2}\,dx$

integralinin eşiti nedir?

14. $\int (4x^3+1)\cdot\sqrt[3]{x^4+x-1}\,dx$

integralinin eşiti nedir?

15. $\int \frac{4x+2}{\sqrt[3]{x^2+x+1}}\,dx$

integralinin eşiti nedir?

16. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt[3]{(x^2+1)^2}}$

integralinin eşiti nedir?

Tabii u diyeceğiniz ifade her zaman polinom tipi bir ifade olmayabilir. Bazen logaritmik, bazen trigonometrik, bazen üstel ya da ters trigonometrik bir ifade de olabilir. Ona göre☺

1. $\int \cos^2 x\cdot\sin x\,dx$

integralinin eşiti nedir?

2. $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin x\cos^2 x\,dx$

integralinin değeri kaçtır?

3. $\int \frac{\cos x\,dx}{\sin^2 x}$

integralinin eşiti nedir?

4. $\int \cos x\sqrt{\sin x}\,dx$

integralinin eşiti nedir?

5. $\int \cos^2 x\cdot\sin 2x\,dx$

integralinin eşiti nedir?

6. $\int \frac{\sin x}{\sqrt{\cos x}}\,dx$

integralinin eşiti nedir?

7. $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \tan x\cdot(1+\tan^2 x)\,dx$

integralinin değeri kaçtır?

8. $\int_{\ln 2}^{\ln 3} e^x(1+e^x)^2\,dx$

integralinin değeri kaçtır?

9. $\int \frac{(\arcsin x)^2}{\sqrt{1-x^2}}dx$

integralinin eşiti nedir?

10. $\int \frac{\arctan x}{1+x^2}dx$

integralinin eşiti nedir?

11. $\int \frac{(\ln x)^2}{x}dx$

integralinin eşiti nedir?

12. $\int_{e}^{e^2} \frac{dx}{x(\ln x)^2}$

integralinin değeri kaçtır?

13. $\int_0^1 3(x^3+1)^2 d(x^3)$

integralinin değeri kaçtır?

14. $\int \sin^3 x\, d(\sin x)$

integralinin eşiti nedir?

15. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \cdot \sin^2 x\, dx$

integralinin değeri kaçtır?

16. $\int_1^e (1+\ln x)^3 d(\ln x)$

integralinin değeri kaçtır?

$\int \frac{f'(x)dx}{f(x)}$ biçimindeki integrallerde

$f(x) = u$ derseniz $f'(x)dx = du$ olur.

Bu durumda verilen integral

$\int \frac{du}{u} = \ln u + c$ olur.

Tabii ki işlemlerin sonunda u yerine f(x) i yazmayı unutmayın.

Tamam mı?

Yani, paydanın türevi payda varsa bu işinizin acayip derecede kolay olduğu anlamına geliyor. ☺

1. $\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx$

integralinin eşiti nedir?

2. $\int \frac{2}{x}dx$

integralinin eşiti nedir?

3. $\int \left(1+\frac{2}{x}\right)dx$

integralinin eşiti nedir?

4. $\int \frac{3dx}{3x-1}$

integralinin eşiti nedir?

5. $\int \frac{dx}{3x-5}$

integralinin eşiti nedir?

6. $\int \frac{3dx}{4x-2}$

integralinin eşiti nedir?

7. $\int \frac{4dx}{2x+3}$

integralinin eşiti nedir?

8. $\int_0^3 \frac{dx}{x+3}$

integralinin değeri kaçtır?

9. $\int_1^3 \frac{xdx}{x^2+1}$

integralinin değeri kaçtır?

10. $\int_0^1 \frac{3x^2+1}{x^3+x+1}dx$

integralinin değeri kaçtır?

11. $\int \left(3x^2 - \frac{2}{x+3}\right)dx$

integralinin eşiti nedir?

12. $\int \left(\frac{1}{x-1} + \frac{2}{x-3}\right)dx$

integralinin eşiti nedir?

13. $\int \left(\frac{3}{x-2} - \frac{2}{x-1}\right)dx$

integralinin eşiti nedir?

14. $\int \frac{(2x-3)dx}{x^2-3x+3}$

integralinin eşiti nedir?

15. $\int_0^1 \left(x + \frac{2x}{x^2+3}\right)dx$

integralinin değeri kaçtır?

1. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x\,dx}{1+\sin^2 x}$

integralinin değeri kaçtır?

2. $\int \frac{x\,dx}{x^2-2}$

integralinin eşiti nedir?

3. $\int \frac{x^2\,dx}{x^3-2}$

integralinin eşiti nedir?

4. $\int \frac{(x^2-x)(2x-1)dx}{(x^2-x)^2+3}$

integralinin eşiti nedir?

5. $\int_0^1 \frac{x(x^2+1)^2\,dx}{(x^2+1)^3+1}$

integralinin değeri kaçtır?

6. $\int \frac{x(x^2+2)^2\,dx}{(x^2+2)^3-5}$

integralinin eşiti nedir?

7. $\int \frac{\cos x}{\sin x}dx$

integralinin eşiti nedir?

8. $\int \frac{\sin x}{1-\cos x}dx$

integralinin eşiti nedir?

9. $\int \frac{1+\sin 2x}{x+\sin^2 x}dx$

integralinin eşiti nedir?

10. $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin 2x\,dx}{1+\cos^2 x}$

integralinin değeri kaçtır?

11. $\int \frac{1+e^x}{x+e^x}dx$

integralinin eşiti nedir?

12. $\int \frac{dx}{x\ln x}$

integralinin eşiti nedir?

13. $\int \tan x\,dx$

integralinin eşiti nedir?

14. $\int 3\cot x\,dx$

integralinin eşiti nedir?

15. $\int \frac{x\cdot\cos\left(x^2+1\right)dx}{1+\sin\left(x^2+1\right)}$

integralinin eşiti nedir?

16. $\int \frac{dx}{\cos^2 x\cdot(1+\tan x)}$

integralinin eşiti nedir?

$\int e^{f(x)} f'(x)dx$ biçimindeki integrallerde

$f(x) = u$ dersek, $f'(x)dx = du$ olur.

Bu durumda integral

$\int e^u du = e^u + c$ olarak bulunur.

1. $\int 2e^{3x}dx$

integralinin eşiti nedir?

2. $\int 2e^{2x+1}dx$

integralinin eşiti nedir?

3. $\int (2x+1)\cdot e^{x^2+x}dx$

integralinin eşiti nedir?

4. $\int \cos x\, e^{\sin x}dx$

integralinin eşiti nedir?

5. $\int_{\ln 2}^{\ln 5} e^x dx$

integralinin değeri kaçtır?

6. $\int_0^1 e^{3x-1}dx$

integralinin değeri kaçtır?

7. $\int_0^1 \frac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}dx$

integralinin değeri kaçtır?

8. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{e^{\tan x}}{\cos^2 x}dx$

integralinin değeri kaçtır?

9. $\int \frac{e^{\arctan x}}{1+x^2}dx$

integralinin eşiti nedir?

10. $\int_0^1 \left(2x - e^{x+1}\right)dx$

integralinin değeri kaçtır?

11. $\int \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}dx$

integralinin eşiti nedir?

12. $\int \frac{dx}{e^{2x-1}}$

integralinin eşiti nedir?

13. $\int \left(e^x+1\right)^2 dx$

integralinin eşiti nedir?

14. $\int \sin 2x\, e^{1+\sin^2 x}\, dx$

integralinin eşiti nedir?

15. $\int_0^{\ln 2} e^x \cdot \left(e^x+2\right)^2 dx$

integralinin değeri kaçtır?

16. $\int_0^1 2^{x+1} \cdot \ln 2 \cdot dx$

integralinin değeri kaçtır?

$\int f(g(x)) \cdot g'(x)dx$

biçimindeki integrallerde g(x) = u ve dolayısıyla da g'(x)dx = du diyerek $\int f(u)du$ integrali hesaplanır.

Örneğin

$$\int f'(x)\cdot \cos(f(x))dx = \int \cos u\, du = \sin u + c = \sin(f(x)) + c$$

olarak bulunur.

Bunları çoğaltabilirsiniz tabii ki.

1. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x - \cos x)dx$

integralinin değeri kaçtır?

2. $\int \sin 2x\, dx$

integralinin eşiti nedir?

3. $\int (4+\sin x)dx$

integralinin eşiti nedir?

4. $\int_0^{\frac{\pi}{8}} \cos 4x\, dx$

integralinin değeri kaçtır?

5. $\int 5\sin(x-5)dx$

integralinin eşiti nedir?

6. $\int e^x \cos\left(e^x+1\right)dx$

integralinin eşiti nedir?

7. $\int x \sin\left(x^2+1\right)dx$

integralinin eşiti nedir?

8. $\int 2\cos(4x-1)dx$

integralinin eşiti nedir?

9. $\int -x\cdot\sin(x^2-1)dx$

integralinin eşiti nedir?

10. $\int (\sin x - 4\cos 2x)dx$

integralinin eşiti nedir?

11. $\int (\sin 2x - \sin x)dx$

integralinin eşiti nedir?

12. $\int x\cdot\cos\left(3-2x^2\right)dx$

integralinin eşiti nedir?

13. $\int (x+1)\cos\left(x^2+2x+3\right)dx$

integralinin eşiti nedir?

14. $\int \sin\left(\frac{x+1}{2}\right)dx$

integralinin eşiti nedir?

15. $\int \frac{1}{x^2}\cdot\sin\left(\frac{1}{x}\right)dx$

integralinin eşiti nedir?

1. $\int \frac{\sin(\tan x)}{\cos^2 x}dx$

integralinin eşiti nedir?

2. $\int \frac{\sin\sqrt{x}\,dx}{2\sqrt{x}}$

integralinin eşiti nedir?

3. $\int \frac{\cos\sqrt{x+2}\,dx}{\sqrt{x+2}}$

integralinin eşiti nedir?

4. $\int \frac{\cos(\ln x)}{x}dx$

integralinin eşiti nedir?

5. $\int \frac{\sin(1+\ln x)}{x}dx$

integralinin eşiti nedir?

6. $\int \sin\left(\cos^2 x\right)\sin 2x\,dx$

integralinin eşiti nedir?

7. $\int 12\cdot\sin 3x\cdot\cos 3x\,dx$

integralinin eşiti nedir?

8. $\int \left(\sin^2 x-\cos^2 x\right)dx$

integralinin eşiti nedir?

9. $\int_0^{\pi} (\sin x - \cos x)^2\,dx$

integralinin değeri kaçtır?

10. $\int \cos x \cdot (1+\sin x)^2\,dx$

integralinin eşiti nedir?

11. $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin x \cdot (2-\cos x)^3\,dx$

integralinin değeri kaçtır?

12. $\int x\tan x^2\,dx$

integralinin eşiti nedir?

Şu ilk soruda dönüşüm mönüşüm yok.☺
Diğer üç soru için temel olsun diye yazdım. Son üç soru tanx in kuvvetlerinin integraliyle ilgili. Hepsini aynı yöntemle çözmeye çalışmayın tabii.

13. $\int \left(1+\tan^2 x\right)dx$

integralinin eşiti nedir?

14. $\int \tan x \cdot \left(1+\tan^2 x\right)dx$

integralinin eşiti nedir?

15. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\tan^2 x + \tan^4 x\right)dx$

integralinin değeri kaçtır?

16. $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} (\tan x + \cot x)^2\,dx$

integralinin değeri kaçtır?

İntegrali ters trigonometrik fonksiyon olan ifadeler

Bunlarda da f(x) = u diyerek sonuca gidebilirsiniz.

$$\int \frac{f'(x)dx}{1+[f(x)]^2} = \arctan(f(x)) + c$$
$$= -\text{arccot}(f(x)) + c$$

$$\int \frac{f'(x)dx}{\sqrt{1-[f(x)]^2}} = \arcsin(f(x)) + c$$
$$= -\arccos(f(x)) + c$$

1. $\int \frac{2dx}{1+x^2}$

integralinin eşiti nedir?

2. $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$

integralinin değeri kaçtır?

3. $\int \frac{dx}{1+(x+2)^2}$

integralinin eşiti nedir?

4. $\int \frac{e^x dx}{1+e^{2x}}$

integralinin eşiti nedir?

5. $\int \frac{x dx}{1+\left(x^2+2\right)^2}$

integralinin eşiti nedir?

6. $\int \frac{\cos x\,dx}{1+\sin^2 x}$

integralinin eşiti nedir?

7. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$

integralinin eşiti nedir?

8. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-(x-5)^2}}$

integralinin eşiti nedir?

9. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-(2x+1)^2}}$

integralinin eşiti nedir?

10. $\int \frac{e^x dx}{\sqrt{1-e^{2x}}}$

integralinin eşiti nedir?

11. $\int \frac{dx}{x\sqrt{1-(\ln x)^2}}$

integralinin eşiti nedir?

12. $\int \frac{\cos(\arctan x)}{1+x^2}dx$

integralinin eşiti nedir?

13. $\int \frac{dx}{x\cdot\left(1+\ln^2 x\right)}$

integralinin eşiti nedir?

14. $\int \frac{dx}{x^2+2x+2}$

integralinin eşiti nedir?

15. $\int \frac{2x+1}{x^2+1}dx$

integralinin eşiti nedir?

Kısmi (Parçalı) İntegral Yöntemi

Çarpım şeklinde olup da değişken değiştirme yönteminin bir işe yaramadığı bazı sorularda büyük bir olasılıkla şu yöntem işinizi görür. Denemekte fayda var.☺

Tabii ki önce bunun ne olduğunu bilmek lazım. Kısaca izah edeyim. İspatına gerek yok.☺

$\int u dv = u\cdot v - \int v du$ dur.

Ama $\int v du$ nun integrali $\int u dv$ nin integralinden daha zor olacaksa böyle bir sıkıntıya girmeye de gerek yok bence.☺

İyi de nereden bileceksiniz bunu. Öyle değil mi?☺

Eee... Biraz da tecrübe lazım elbette.☺ Onun için biraz antrenman yaparak en azından hangi sorularda kullanıldığını görün.

Bu arada, bir de neye u, neye dv diyeceksiniz?

En önemlisi de bu zaten.

Söyleyeyim. Önce u yu seçeceksiniz. u yu doğru seçince geri kalanların hepsine (dx ile beraber) dv demek zorundasınız zaten.

u nun seçiminde öncelik sırası

1) **(L)** Logaritmik fonksiyon $(\ln x, \ln(x+1), \ldots)$

2) **(A)** Ters trigonometrik fonk. $(\arctan x, \ldots)$

3) **(P)** Polinom fonksiyon $\left(x, x^3, (x^2+1), \ldots\right)$

4) **(T)** Trigonometrik fonksiyon $(\cos x, \sin x, \ldots)$

5) **(Ü)** Üstel fonksiyon $(e^x, e^{(x^2)}, \ldots)$

Kısmi integral yöntemi dedikleri bu yöntemle çözülen sorularda logaritmik fonksiyon varsa u odur.

Ve üstel fonksiyon varsa bu hiçbir zaman u olamaz.Yani üstel fonksiyona u denilmez.☺

Ok.☺

Tabii ki bir fonksiyonu görünce üstel mi, logaritmik mi olduğunu anlarsınız herhalde ☺

O kadarını da bilin yani.☺

Örnek Soru

$\int (2x+1)e^x dx$

integralinin eşiti nedir?

Çözelim☺

e üssü bir şeyler görünce insan hemen üssün türevini arıyor. Bakıyor ki yok. O zaman anlıyor ki bu iş öyle kolay pabuç bırakacak gibi değil. Belki ondan sonra aklına bu yöntem geliyor. Yani kısmi integral yöntemi. Bu yöntemin en önemli ayağı u nun seçimidir. İki tür fonksiyon var burada. Biri üstel (e^x), diğeri polinom (2x + 1) fonksiyon. Üstel fonksiyona u demeyeceğinizi biliyorsunuz.☺

O halde 2x + 1 = u ve geri kalan $e^x dx = dv$ dir.

Şimdi formülü hatırlayın.

$\int u dv = uv - \int v du$ idi. Bu formüldeki u ve dv yi biliyoruz. Ama du ve v yi?

Onun için du ve v yi bulmak lâzım.

du yu bulmak kolay. u = 2x + 1 ise du = 2dx olur. (Anladınız mı bunu? Diferansiyel olayı☺)

v yi bulmak biraz daha meşakkatli. $e^x dx = dv$ eşitliğinde her iki yanın integrali alınarak v bulunur.

$\int e^x dx = \int dv$ ise $e^x = v$ olur.

Gerisi bulunan değerleri formülde yerine yazmak.

$$\int u dv = uv - \int v du$$

$$\int (2x+1)e^x dx = (2x+1)e^x - \int 2e^x dx$$

$(2x+1)e^x - 2e^x = (2x-1)e^x + c$ olarak bulup rahatlayabilirsiniz.

Ohh beee...

1. $\int \ln x \, dx$

integralinin eşiti nedir?

2. $\int \ln(x+1)dx$

integralinin eşiti nedir?

3. $\int (2x-\ln x)dx$

integralinin eşiti nedir?

4. $\int_0^1 \ln(x+3)dx$

integralinin değeri kaçtır?

5. $\int x\cdot\ln x dx$

integralinin eşiti nedir?

6. $\int x^2\cdot\ln x dx$

integralinin eşiti nedir?

Şu söyleyeceğim şey işinize yarayabilir.

$\int P(x)\cdot e^x dx = e^x\left(P(x)-P'(x)+P''(x)-P'''(x)+...\right)$

şeklindedir.

Meselâ

$\int x^3\cdot e^x dx = e^x\left(x^3-3x^2+6x-6\right)+c$

$\int x^2\cdot e^x dx = e^x\left(x^2-2x+2\right)+c$ dir.

Böyle yaparsanız 15 saniye. Öbür türlü düşünürseniz vaktiniz çok olmalı☺

1. $\int_0^1 x\cdot e^x dx$

integralinin değeri kaçtır?

2. $\int (x+2)e^x dx$

integralinin eşiti nedir?

3. $\int x^2 e^x dx$

integralinin eşiti nedir?

4. $\int \left(x^2+x\right)\cdot e^x dx$

integralinin eşiti nedir?

5. $\int x\cdot\left(1-e^x\right)dx$

integralinin eşiti nedir?

6. $\int x\cdot\cos x dx$

integralinin eşiti nedir?

Rasyonel Fonksiyonların İntegrali Ve Basit kesirlere Ayırma Yöntemi

Önce iyi bildiğiniz birkaç şeyi size tekrardan hatırlatayım.

$$\int \frac{du}{u} = \ln u + c$$

$$\int \frac{du}{1+u^2} = \arctan u + c$$

$$\int \frac{du}{u^n} = \int u^{-n} du = \ldots \text{ idi.}$$

Dolayısıyla rasyonel bir ifadenin integralini alırken bakacağınız **ilk husus paydanın türevinin payında olup olmadığıdır.** Eğer varsa maceraya girmeye hiç gerek yok... Şip şak... Cevabı logaritmik olarak bulun.☺ Ok.

7. $\int \frac{dx}{x-2}$

integralinin eşiti nedir?

8. $\int \frac{2x+1}{x^2+x-5} dx$

integralinin eşiti nedir?

9. $\int_0^1 \frac{4x}{x^2+5} dx$

integralinin değeri kaçtır?

10. $\int_1^2 \left(\frac{2x}{x^2+1} - \frac{1}{x}\right) dx$

integralinin değeri kaçtır?

Eğer paydanın türevi payında yoksa o zaman **bakacağınız ikinci durum paydanın $1+u^2$ gibi yazılıp yazılamadığıdır.** Eğer yazılabiliyorsa biliyorsunuz ki

$$\int \frac{du}{1+u^2} = \arctan u + c \text{ idi.}$$

11. $\int \frac{3\,dx}{1+x^2}$

integralinin eşiti nedir?

12. $\int \frac{dx}{1+(x-2)^2}$

integralinin eşiti nedir?

13. $\int \frac{6dx}{1+(2x-5)^2}$

integralinin eşiti nedir?

1. $\int \frac{dx}{1+(3x-2)^2}$

integralinin eşiti nedir?

2. $\int \frac{dx}{1+\left(x^2+2x+1\right)}$

integralinin eşiti nedir?

Eğer payda u^n biçiminde olursa. Onu da biliyoruz.

3. $\int \frac{dx}{(x+2)^2}$

integralinin eşiti nedir?

4. $\int \frac{dx}{(2x-3)^3}$

integralinin eşiti nedir?

5. $\int \frac{dx}{x^2-2x+1}$

integralinin eşiti nedir?

6. $\int \frac{dx}{x^3+3x^2+3x+1}$

integralinin eşiti nedir?

7. $\int \frac{dx}{4x^2+4x+1}$

integralinin eşiti nedir?

8. $\int \frac{dx}{x^2+6x+9}$

integralinin eşiti nedir?

Paydanın türevi üstte (payında) yok ve payda $1+u^2$ gibi de yazılamıyorsa... Dedikten sonra...
Devam edeyim.

P(x) ve Q(x) polinom fonksiyonlar olmak üzere,

$\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx$ integrali hesaplarken ilk önce pay ve paydanın derecesine bakın.

$\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx$ **integralinde,**

Payın derecesi paydanın derecesinden küçük ve payda çarpanlarına ayrılabiliyorsa bu tür integraller de basit kesirlere ayırma yöntemi kullanılır.

Biliyorum...
Şimdi **basit kesirlere** ayırmanın ne olduğunu da açıklamak lâzım şimdi☺

Basit kesir meselesi şu

$\frac{A}{ax+b}$, $\frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}$

şeklindeki ifadelere **basit kesir** denir.

Ama buradaki ax^2+bx+c in çarpanlarına ayrılmayan bir ifade olması lâzım.

Ama $\frac{3x+1}{x^2-4}$, $\frac{x+2}{x^2+x-6}$ gibi paydası çarpanlarına ayrılabilen ifadeler basit kesir değildir. Çünkü bunların paydaları çarpanlarına ayrılabiliyor.

Sorularda karşınıza nasıl geleceğini de söyleyeyim. Aşağıdaki eşitliklerin sol tarafındaki ifadenin integrali sorulduğunda bu rasyonel ifadeler eşitliğin sağ tarafındaki ifadeler gibi düşünülerek basit kesirlere ayrılır. Sonra integralleri hesaplanır.

$$\frac{2x+3}{x^2+x-2}=\frac{A}{x+2}+\frac{B}{x-1}$$

$$\frac{4}{x^2+4x+3}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{x+3}$$

Bu eşitliklerdeki A, B, C değerleri gerekli işlemler yapılarak bulunur.
Nasıl bulacağınızı da bana sormayacaksınız değil mi?☺
Polinom eşitliğiyle. Ya da...

9. $\frac{3x+3}{(x+2)(x-1)}=\frac{2}{x-1}+\frac{1}{x+2}$ olmak üzere,

$\int \frac{3x+3}{(x+2)(x-1)}dx$ **integralinin eşiti nedir?**

10. $\int \frac{x+2}{x^2+x}dx$

integralinin eşiti nedir?

11. $\int \frac{5}{x^2+x-6}dx$

integralinin eşiti nedir?

1. $\int \frac{2x-5}{x^2+x-2}dx$

integralinin eşiti nedir?

2. $\int \frac{5x-7}{x^2-2x-3}dx$

integralinin eşiti nedir?

3. $\int \frac{2x-8}{x^2-4}dx$

integralinin eşiti nedir?

4. $\int_3^5 \frac{1}{x^2+x}dx$

integralinin değeri kaçtır?

5. $\int_2^3 \frac{3x-1}{x^2-1}dx$

integralinin değeri kaçtır?

6. $\int \frac{2x-12}{x^2-9}dx$

integralinin eşiti nedir?

$\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx$ **integralinde payın derecesi paydanın derecesinden büyük veya eşit ise ilk önce payı paydaya bölün.**
Sonra ne yapacağınıza karar verirsiniz artık.☺

7. $\int \left(\frac{5+2x}{x}\right)dx$

integralinin eşiti nedir?

8. $\int \frac{3x^2+2}{x}dx$

integralinin eşiti nedir?

9. $\int \frac{x+2}{x+1}dx$

integralinin eşiti nedir?

10. $\int \frac{2x+3}{x-1}dx$

integralinin eşiti nedir?

11. $\int \frac{x}{x-2}dx$

integralinin eşiti nedir?

12. $\int_0^1 \frac{2x-1}{x+1}dx$

integralinin değeri kaçtır?

1. $\int \frac{x^2}{x+1}dx$

integralinin eşiti nedir?

2. $\int \frac{3x^2-2x}{x-1}dx$

integralinin eşiti nedir?

3. $\int \frac{x^2-x+1}{x-2}dx$

integralinin değeri kaçtır?

4. $\int \frac{2x^2+1}{x^2+1}dx$

integralinin eşiti nedir?

5. $\int_0^1 \frac{x^2}{x+1}dx$

integralinin değeri kaçtır?

6. $\int \frac{x^2-x+2}{x-1}dx$

integralinin eşiti nedir?

7. $\int \frac{x^2+2x-4}{x-2}dx$

integralinin eşiti nedir?

8. $\int_0^1 \frac{x^2+3x}{x+1}dx$

integralinin değeri kaçtır?

9. $\int_0^1 \frac{(x+2)^2-3}{x+4}dx$

integralinin değeri kaçtır?

10. $\int_1^2 \frac{4x^2-6x}{2x+1}dx$

integralinin değeri kaçtır?

11. $\int_0^1 \frac{x^3}{x+2}dx$

integralinin değeri kaçtır?

12. $\int_0^1 \left(\frac{x+3}{x+2}-\frac{x+2}{x+1}\right)dx$

integralinin değeri kaçtır?

İntegralde dönüşüm yapma muhabbeti

Aslında değişken değiştirerek çözülen integrallerde yaptık bunu. Hatta orada neye u diyeceğinize bile siz karar vermek zorundaydınız. Oysa burada yapacağınız dönüşüm bile hazır veriliyor. ☺
Tek mesele değişken dönüşümünü yapabilmek. Kesinlikle çok kolay☺

Ama aklınızda olsun☺
Köklü ifadeleri integral altında görürseniz ilk işiniz kökün ortadan kalkacağı basit dönüşümleri düşünmek olmalı.

Gerçi sınavlarda bu tür sorularda çoğu kez hangi dönüşümü yapacağınızı veriyorlar. Onun için burada yeni bir bilgiye gerek yok. Ben de vermiycem zaten☺
Yalnız dönüşüm yaparken dx i ve sınırları (varsa tabii ki) dönüştürmeyi unutmayın.

Örnek Soru

$\int x^2 \ln x dx$

integralinde lnx = u dönüşümü yapılırsa hangi ifade elde edilir?

Çözelim☺
İlk önce x in eşitini bulalım. $\ln x = u$ ise $x = e^u$ dur. (Hatırlayın. Logaritmadan☹)
dx i de bulalım. $x = e^u$ ise $dx = e^u du$ olur.
x ve dx i integralde yerine yazıp olayı bitirelim. Bakalım neye dönüşüyor.

$\int (e^u)^2 u \cdot e^u du = \int u \cdot e^{3u} du$ elde ediliyormuş.

Var mı bir zorluğu? ☺

1. $\int x^2 \cdot (x^3+1)dx$

integralinde $x^3+1=u$ dönüşümü yapılırsa hangi ifade elde edilir?

2. $\int (\sin^3 x + \sin x) \cdot \cos x dx$

integralinde sinx = u dönüşümü yapılırsa hangi ifade elde edilir?

3. $\int (e^{2x}+1) \cdot e^x dx$

integralinde $u = e^x$ dönüşümü yapılırsa hangi ifade elde edilir?

4. $\int e^{4x} dx$

integralinde $e^x = t$ dönüşümü yapılırsa hangi ifade elde edilir?

5. $\int \left(e^{4x}-e^{x}\right)dx$

integralinde $e^{x}=u$ dönüşümü yapılırsa hangi ifade elde edilir?

6. $\int \frac{1}{x}\cdot\left(\ln x+\ln^2 x\right)dx$

integralinde $\ln x = u$ dönüşümü yapılırsa hangi ifade elde edilir?

7. $\int \frac{1}{x\cdot\left(1+\ln^2 x\right)}dx$

integralinde $\ln x = u$ dönüşümü yapılırsa hangi ifade elde edilir?

8. $\int \frac{2\cos x}{\sin x+\sin^2 x}dx$

integralinde $\sin x = t$ dönüşümü yapılırsa hangi ifade elde edilir?

9. $\int (\cos x-\sin x)dx$

integralinde $t=\pi-x$ dönüşümü yapılırsa hangi ifade elde edilir?

10. $\int \sin(\arccos x)dx$

integralinde $t = \arccos x$ dönüşümü yapılırsa hangi ifade elde edilir?

1. $\int \left(x+\sqrt{x+2}\right)dx$

integralinde $\sqrt{x+2}=u$ dönüşümü yapılırsa hangi ifade elde edilir?

2. $\int x e^{\sqrt{x}}\,dx$

integralinde $x=t^2$ dönüşümü yapılırsa hangi ifade elde edilir?

3. $\int \sqrt{1-x^2}\,dx$

integralinde $x = \sin t$ dönüşümü yapılırsa hangi ifade elde edilir?

4. $\int x\sqrt{9-x^2}\,dx$

integralinde $x = 3\sin t$ dönüşümü yapılırsa hangi ifade elde edilir?

5. $\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx$

integralinde $x = \sin t$ dönüşümü yapılırsa hangi ifade elde edilir?

6. $\int \sqrt{4+x^2}\,dx$

integralinde $x = 2\tan t$ dönüşümü yapılırsa hangi integral elde edilir?

7. $\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}dx$

İntegralinde tant = x dönüşümü yapılırsa hangi ifade elde edilir?

8. $\int \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}dx$

integralinde $u=\sqrt{x}$ dönüşümü yapılırsa hangi ifade elde edilir?

9. $\int \frac{\sqrt{x+1}}{x}dx$

integralinde $x+1=u^2$ dönüşümü yapılırsa hangi ifade elde edilir?

10. $\int \frac{x}{\sqrt{1-x}}dx$

integralinde $x=1-u^2$ dönüşümü yapılırsa hangi ifade elde edilir?

11. $\int \frac{x+\sqrt{x-1}}{\sqrt[4]{x-1}}dx$

integralinde $x-1=u^4$ dönüşümü yapılırsa hangi ifade elde edilir?

12. $\int \frac{\sqrt{x+1}+\sqrt[3]{x+1}}{1+\sqrt[6]{x+1}}dx$

integralinde $x+1=u^6$ dönüşümü yapılırsa hangi ifade elde edilir?

Belirli integral

Zor bir iş, zamanında yapmamız gerekip de yapmadığımız kolay şeylerin birikmesiyle oluşur.

Henry Ford

Plansız çalışan kimse, ülke ülke dolaşıp hazine arayan bir insana benzer.

Descartes

BELİRLİ İNTEGRAL

Bu son konu. Artık ANTRENMANLARLA MATEMATİK yolculuğunun sonuna geldik.☹
Bu sette elbette ki size lâzım olan konuları vermeye çalıştım. Ama daha çok özgüven ve cesaret vermeye çalıştım. Ve ısrarla şunu vurguladım. **Kararlı ve sabırlı bir şekilde planlı ve programlı çalışırsanız kesinlikle başarabilirsiniz.** Unutmayın ki matematiği çok iyi olanları diğerlerinden ayıran en önemli fark sabırlı ve planlı çalışmış olmalarıdır. Yoksa zekâları filân değil.
İsteyin. Başarılı olmayı isteyin. Ve unutmayın ki güzel bir şeyi ısrarla isterseniz ona eninde sonunda ulaşırsınız. Çünkü O **"Vermek istemeseydi (bize) istemek (duygusunu) vermezdi."** Demek ki vermek istiyor☺

Neyse... Konuya başlayalım☺
Aslında daha önce belirli (sınırlı) integralin ne olduğundan bahsettim. Ama yine ifade edeyim. Belirli integralin ne olduğundan kastım sınırları olan integral. Belirsiz integral olayını halledenler için belirlisi daha kolay. Belirli integralin de özellikleri filan var. Fakat işinizi zorlaştıracak cinsten değil kesinlikle.
Soğuk tanımları çok sevmediğinizi de biliyorum. Ama küçücük bir tanım yapalım yine. Ne dersiniz?

(a,b) aralığındaki bütün x değerleri için

$\int f'(x)\,dx = f(x) + c$ ise, $\int_a^b f'(x)\,dx$ ifadesine f '(x) fonksiyonunun a dan b ye kadar belirli integrali denir ve

$$\int_a^b f'(x)\,dx = f(x)\Big|_a^b = f(b) - f(a) \text{ dır.}$$

İşte. Bu integral hesabının birinci kuralıdır. Başka bir şey de yok aslında.

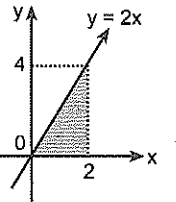
Yani, belirli integral sorularında ilk önce belirsiz integrali bulun, sonra bulduğunuz fonksiyonda üst sınır değerini yerine yazarak elde ettiğiniz değerden, alt sınır değerini yerine yazarak bulacağınız değeri çıkarın. Tamam mı?☺

Bazı özel sorular hariç ama☺

O zaman şunu anlamış olmanız lâzım. Eğer belirsiz integrali hallettiyseniz burada bir problem yaşamayacaksınız. Ama halledememişseniz sıkıntı kaçınılmaz.☺
Bir de, belirli integralde c sabiti sadeleşeceğinden bunu yazmaya gerek yok. Bilginiz olsun.

Olayın derinliklerine dalmadan şu soruma cevap verin bakalım.

$\int_0^2 2x\,dx$ **integralinin değeri ile şekildeki y = 2x ve x = 2 doğruları ile Ox ekseni arasındaki alan eşit midir?**



Peki diyelim ki eşit çıktı.
Öyleyse her fonksiyon için böyle bir durum söz konusu mudur?
Var mı bir fikriniz?
Ne dersiniz?
Siz bu soruların cevabını ararken☺☺☺ ben gerçeği söyleyeyim. "Sadece bu soruda değil her zaman eşit çıkar."
Demek ki belirli integral eğri ile x ekseni arasındaki alanı veriyor. Ama bu kısmıyla şimdilik ilgilenmiycez.

Örnek Soru

$$\int_0^1 \left(3x^2 + 4x - 2\right)dx$$

belirli integralinin değeri kaçtır?

Çözelim☺
Göreceksiniz çok kolay.
İlk önce sınırları yokmuş gibi davranıp integralin eşitini bulun. Sadece sonuna c yi yazmayın.
Bunu nasıl ifade ettiğime dikkat edin.

$$\int_0^1 \left(3x^2 + 4x - 2\right)dx = 3\cdot\frac{x^3}{3} + 4\cdot\frac{x^2}{2} - 2x\,\Big|_0^1$$

Yani, belirsiz gibi düşünüp sonucu buldum. Sonra sağ tarafına çizdiğim çizginin sağ altına integralin alt sınırını üstüne de üst sınırını yazdım☺
Sonra?
Sonrasına da bakın☺

$x^3+2x^2-2x\Big|_0^1=(1^3+2.1^2-2.1)-(0^3+2.0^2-2.0)$

Önce üst sınırı yazdım. Sonra da alt sınırı. Ve ikisinin farkını aldım.
Ve sonucu 1 buldum.
Şaka gibi.☺ Kolaymış yaw☺

Başka bi tane daha yapayım.

Örnek Soru

$$\int_1^3 \frac{x^2}{x+1}dx$$

ifadesinin değeri kaçtır?

Çözelim☺
Aslında soruların belirli integralle ilgili kısmı kolay. Siz yeter ki belirsiz kısmını adam gibi halledin.☺
Bunda da öyle.

Bir kesrin yani, $\frac{x^2}{x+1}$ kesrinin integralini bulcaz.

Hatırlayın. Kesirli bir ifadenin integralinde sırayla neye bakıyorduk?
İlk önce paydanın türevi payda var mı?
Yok☺

İkinci olarak ifade $\frac{du}{1+u^2}$ gibi yazılabiliyor mu?

Hayır☺
Üçüncü olarak payın derecesi paydadan büyük veya eşit mi?
Büyük veya eşit ise polinom bölmesi yapıyor ve devam ediyorduk.
Bu soruda bu durum var.
Ama diğerini de söyleyeyim. Payın derecesi paydadan küçük ve payda çarpanlarına ayrılıyorsa basit kesirlere ayırma yöntemini kullanıyorduk.
Devam edelim.
Polinom bölmesi yaparak

$\frac{x^2}{x+1}=x-1+\frac{1}{x+1}$ olduğunu görün ve ifade edin.

Daha sonra da $\int_1^3\frac{x^2}{x+1}dx=\int_1^3\left(x-1+\frac{1}{x+1}\right)dx$ olarak yazıp integralin değerini hesaplayın.
Hesaplayalım.

$$\int_1^3\left(x-1+\frac{1}{x+1}\right)dx=\frac{x^2}{2}-x+\ln(x+1)\Big|_1^3$$

Gerisini biliyorsunuz☺

Önce 3 ü sonra da 1 i yerine yazıp çıkarıyoruz.

$$\left[\frac{3^2}{2}-3+\ln(3+1)\right]-\left[\frac{1^2}{2}-1+\ln(1+1)\right]$$

Bu işlemin sonucunda da 2 + ln2 yi bulursunuz artık.
Gördüğünüz gibi. Buradaki olayın zorluğu integralin belirli kısmında değil belirsiz kısmında.
Onun için tekrar tekrar söylüyorum. Lütfen belirsiz integrali adam gibi öğrenin. Yoksa her seferinde olmasa bile baya bi yamulursunuz.☺

Belirli İntegralin Özellikleri

1. $\int_a^a f(x)dx=0$

Gayet mantıklı zaten. Açıklamaya bile gerek yok bunu. Çünkü belirli integral eğri ile x ekseni arasındaki alan idi. Ama a dan a ya kadar alan olmaz ki☺

Örneğin $\int_2^2(x^5+\ln x)dx=0$ dır. Herhalde gidip

$x^5+\ln x$ in integralini hesaplayıp da yapmazsınız bunu. Değil mi? ☺
Şimdi şunu yapın bakayım.

$\int_{61}^{61}\left(2x^3+\frac{\sqrt{x}}{x+2}\right)dx$ ifadesin değeri kaçtır?

Sıfır buldunuz değil mi?
Aferin. Siz süpersiniz yaw☺
Neyse diğer özellikleri de verip geçeyim.

2. $\int_a^b f(x)dx=-\int_b^a f(x)dx$ tir.

Bu da gayet mantıklı. Öyle değil mi?
Çünkü f(b) – f(a) = – [f(a) – f(b)] dır.

Bir de şunlar var.☺.

$\int_a^b c.f(x)dx=c\int_a^b f(x)dx$

Fonksiyonun önündeki kat sayıyı dışarı çıkarmakta hiç bir sakınca yok. Gerekli olduğuna inanıyorsanız çıkarabilirisiniz. Müsaade ediyorum☺

$\int_a^b[f(x)+g(x)]dx=\int_a^b f(x)dx+\int_a^b g(x)dx$

Toplam fark biçimindeki fonksiyonlarda fonksiyonların ayrı ayrı integralleri hesaplanabilir.
Bu da çok mantıklı bence.☺

1. $\int_0^2(3x^2+2x)dx$

integralinin değeri kaçtır?

2. $\int_{-2}^0(2x+1)\,dx$

integralinin değeri kaçtır?

3. $\int_0^1(x^2+4)dx$

integralinin değeri kaçtır?

4. $\int_0^1(6x-a)dx=1$

olduğuna göre, a kaçtır?

5. $\int_1^m(2mx+1)dx=7$

olduğuna göre, m kaçtır?

6. $\int_a^b(2x-1)dx=24$ ve $b-a=3$

olduğuna göre, a kaçtır?

7. $a \neq 0$ olmak üzere,

$$\int_0^a 6x\,dx = \int_0^a x^2 dx$$

olduğuna göre, a kaçtır?

8. $a \neq 0$ olmak üzere,

$$\left[\int_0^a x\,dx\right]^2 = \int_0^a 3x^2\,dx$$

olduğuna göre, a kaçtır?

9. $n \neq m$ olmak üzere,

$$\int_m^n \frac{2x\,dx}{n-m} = 12$$

olduğuna göre, n + m toplamı kaçtır?

Hatırlayın. $\int df(x) = f(x) + c$ idi.

10. $\int_0^2 d\left(x^2 + 2x\right)$

integralinin değeri kaçtır?

11. $\int_0^1 d\left(3x^3 - x + 1\right)$

integralinin değeri kaçtır?

12. $f(x) = \frac{x+4}{x-2}$

olduğuna göre, $\int_2^3 d\left(f^{-1}(x)\right)$ **değeri kaçtır?**

1. $f^{-1}(x) = \frac{2x+1}{3x-1}$

olduğuna göre, $\int_1^2 d(f(x))$ **değeri kaçtır?**

2. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} (2\cos x - \sin x)dx$

integralinin değeri kaçtır?

3. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} (1 + \tan^2 x)dx$

integralinin değeri kaçtır?

4. $\int_1^2 \left(2x + \frac{3}{x}\right) dx$

integralinin değeri kaçtır?

5. $\int_0^1 \left(2 + \frac{4}{x+1}\right) dx$

integralinin değeri kaçtır?

6. $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos x\,dx$

integralinin değeri kaçtır?

7. $\int_{0}^{\frac{\pi}{6}} \left(\cos^2 x - \sin^2 x\right)dx$

integralinin değeri kaçtır?

8. $\int_{0}^{1} \frac{dx}{1+x^2}$

integralinin değeri kaçtır?

9. a > 0 olmak üzere,

$\int_{0}^{a} (4-x)dx$

integralinin alabileceği en büyük değer kaçtır?

10. a > 0 olmak üzere,

$\int_{0}^{a} \frac{x-4}{2}dx$

integralinin alabileceği en küçük değer kaçtır?

11. m > 0 olmak üzere,

$\int_{1}^{m} \left(x^2-4\right)dx$

integralinin alabileceği en küçük değer kaçtır?

12. m > 0 olmak üzere,

$\int_{0}^{m} \left(-x^2+x+2\right)dx$

integralinin alabileceği en büyük değer kaçtır?

Belirli integralin sonucu bir sayı ve bir sayının türevi de sıfır olduğuna göre☺

1. $\frac{d}{dx}\int_{1}^{2} \left(3x^2+4x-1\right)dx$

ifadesinin değeri kaçtır?

2. $\frac{d}{dx}\int_{-2}^{5} \left(x^4+x^3+x^2+1\right)dx$

ifadesinin değeri kaçtır?

3. $\frac{d}{dx}\int_{\ln 2}^{\ln 3} \left(e^{2x}-e^{-x}\right)dx$

ifadesinin değeri kaçtır?

4. $\frac{d}{dx}\int_{1}^{4} \frac{x^2+2}{x+3}dx$

ifadesinin değeri kaçtır?

5. $\int_{0}^{1} (x+1)^3 dx$

ifadesinin değeri kaçtır?

6. $\int_{1}^{2} (2x-1)^3 dx$

ifadesinin değeri kaçtır?

7. $\int_0^1 x\cdot(x^2+1)^2\,dx$

ifadesinin değeri kaçtır?

8. $\int_0^1 (x^2+x+1)^2(2x+1)dx$

integralinin değeri kaçtır?

9. $\int_1^4 (2+\sqrt{x})dx$

ifadesinin değeri kaçtır?

10. $\int_0^5 \sqrt{3x+1}\,dx$

ifadesinin değeri kaçtır?

11. $\int_0^1 x\cdot\sqrt{x^2+1}\,dx$

ifadesinin değeri kaçtır?

12. $\int_{-1}^1 3x^2\cdot\sqrt[3]{x^3+1}\,dx$

ifadesinin değeri kaçtır?

1. $\int_1^2 \frac{2}{\sqrt{x-1}}dx$

ifadesinin değeri kaçtır?

2. $\int_0^4 \frac{dx}{\sqrt{4-x}}$

ifadesinin değeri kaçtır?

3. $\int_0^4 \frac{x}{\sqrt{x^2+9}}dx$

ifadesinin değeri kaçtır?

4. $\int_0^1 \sqrt{x}\cdot(x-1)\,dx$

ifadesinin değeri kaçtır?

5. $\int_0^{\ln 2} e^x\cdot(1+e^x)^2\,dx$

integralinin değeri kaçtır?

6. $\int_1^{e^2} \frac{(\ln x)^2}{x}dx$

integralinin değeri kaçtır?

7. $\int_{e}^{e^2} \frac{dx}{x(\ln x)^2}$

ifadesinin değeri kaçtır?

8. $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x \cdot \cos x \, dx$

integralinin değeri kaçtır?

9. $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \tan^2 x \cdot (1+\tan^2 x) dx$

integralinin değeri kaçtır?

10. $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ olmak üzere,

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\theta} (\tan^3 x + \tan x) dx = 1$$

olduğuna göre, θ kaçtır?

11. $\int_{0}^{2} \frac{dx}{4x+1}$

integralinin değeri kaçtır?

12. $\int_{1}^{2} \frac{dx}{2x+1} = \ln p$

olduğuna göre, p kaçtır?

1. $\int_{2}^{3} \frac{x\,dx}{x^2-1}$

integralinin değeri kaçtır?

2. $\int_{0}^{1} \frac{2x+1}{x^2+x+2} dx$

integralinin değeri kaçtır?

3. $\int_{m}^{3} \frac{2}{2x-1} dx = \ln 5$

olduğuna göre, m kaçtır?

4. k > 0 olmak üzere,

$$\int_{0}^{k} \frac{2x}{x^2-4} dx = 3\ln 2$$

olduğuna göre, k kaçtır?

5. $\int_{0}^{1} \frac{(2x+1)(x^2+x+1)dx}{(x^2+x+1)^2-1}$

ifadesinin değeri kaçtır?

6. $\int_{e}^{e^4} \frac{dx}{x \cdot \ln x}$

integralinin değeri kaçtır?

7. $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x\,dx}{1+\sin x}$

integralinin değeri kaçtır?

8. $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x\,dx}{3+\sin^2 x}$

integralinin değeri kaçtır?

9. $\int_{0}^{\ln 4} \frac{e^x}{2+e^x}dx$

integralinin değeri kaçtır?

10. $\int_{\ln 2}^{\ln 4} e^x dx$

integralinin değeri kaçtır?

11. $\int_{0}^{1} x \cdot e^{x^2+1}dx$

integralinin değeri kaçtır?

12. $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos x \cdot e^{\sin x}dx$

integralinin değeri kaçtır?

1. $\int_{2}^{4} \frac{x+2}{x-1}dx$

integralinin değeri kaçtır?

2. $\int_{0}^{1} \frac{x^2+2}{x+1}dx$

ifadesinin değeri kaçtır?

3. $\int_{0}^{1} \frac{x^2}{x+1}dx$

integralinin değeri kaçtır?

4. $\int_{1}^{3} \frac{x}{x+1}dx$

integralinin değeri kaçtır?

5. $\int_{2}^{3} \frac{2}{x^2-1}dx$

integralinin değeri kaçtır?

6. $\int_{1}^{2} \frac{1}{x^2+x}dx$

integralinin değeri kaçtır?

7. $\int_{2}^{4} \frac{2x+5}{x^2-1}\,dx$

integralinin değeri kaçtır?

8. $\int_{0}^{1} x \cdot e^x\,dx$

integralinin değeri kaçtır?

9. $\int_{0}^{1} (x+2) \cdot e^x\,dx$

integralinin değeri kaçtır?

10. $\int_{0}^{2} x^2 \cdot e^x\,dx$

integralinin değeri kaçtır?

11. $\int_{1}^{e} \ln x\,dx$

integralinin değeri kaçtır?

12. $\int_{0}^{\frac{\pi}{3}} \left[\frac{d}{dt}\left(\int_{0}^{t} \sin 2x\,dx\right)\right] dt$

ifadesinin değeri kaçtır?

Belirli integralde dönüşüm olayı

Baştan söyleyeyim de.☺ Belirli integralde değişken değiştirirken sınırları ve dx i değiştirmeyi unutmayın. Unutursanız yamulursunuz walla.☺
Gerisi kolay.

Bir örnek vereyim.

Örnek Soru

$$\int_{1}^{5} \frac{4x+1}{\sqrt{2x-1}}\,dx$$

integralinde $\sqrt{2x-1} = u$ dönüşümü yapılırsa hangi integral elde edilir?

Çözelim☺
İlk önce elde edeceğiniz integralin yeni sınırlarını belirleyin. Büyük bir olasılıkla şıklardan ikisi veya üçü gider. (Gerçi bunda şık mık yok. Ama yine de aklınızda olsun☺)
Bakalım neymiş yeni integralin sınırları. İlk integralin sınırları x in değerleridir. x in bu değerleri için u nun değerlerini bulmak lâzım.
Alt sınır x = 1 için $\sqrt{2.1-1} = 1$ ve üst sınır x = 5 için $\sqrt{2.5-1} = 3$ imiş.

Demek dönüşümden sonraki integral $\int_{1}^{3} \ldots$ gibi olacak. Sınır olayını hallettikten sonra x li olan bütün ifadeleri u türünden yazın.
Bu da şöyle oluyor.
$\sqrt{2x-1} = u$ ise $2x-1 = u^2$ ve $x = \frac{1}{2}(u^2+1)$ ve buradan da dx = udu olur.
Burayı (şu dx i bulma meselesini) bi daha izah edeyim. Şöyle yaptım. "sol tarafın x e göre türevi çarpı dx eşittir sağ tarafın u ya göre türevi çarpı du☺"
Anladınız mı şimdi?
Şimdi bu değerleri ilk integralde yerine yazarsanız

$\int_{1}^{3} \frac{4.\frac{1}{2}(u^2+1)+1}{u}\,udu$ elde edilir. Ve bunu da düzenlediğinizde $\int_{1}^{3} (2u^2+3)\,du$ integralini elde edersiniz.

Uzun uzun anlattım. Olayın temel mantığı bu işte.

1. $\int_{4}^{9} \frac{1+\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}\,dx$

integralinde $\sqrt{x} = u$ dönüşümü yapılırsa hangi integral elde edilir?

2. $\int_{0}^{\frac{1}{2}} \sqrt{1-x^2}\,dx$

integralinde x = sint dönüşümü yapıldığında elde edilen integral nedir?

3. $\int_{0}^{\frac{1}{2}} \sin(\arccos x)\,dx$

İntegralinde t = arccosx dönüşümü yapılırsa hangi integral elde edilir?

4. $\int_{-1}^{1} x^2\left(x^3+1\right)dx$

integralinde $x^3+1=u$ dönüşümü yapılırsa hangi integral elde edilir?

5. $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \left(\sin^3 x+\sin x\right)\cos x dx$

integralinde sinx = u dönüşümü yapılırsa hangi integral elde edilir?

6. $\int_{0}^{\ln 3} \left(e^{2x}+1\right)e^x dx$

integralinde $e^x=u$ dönüşümü yapılırsa hangi integral elde edilir?

7. $\int_{\ln 2}^{\ln 3} \left(e^{3x}-e^x\right)dx$

integralinde $e^x=t$ dönüşümü yapılırsa hangi integral elde edilir?

8. $\int_{\ln 2}^{\ln 4} e^{3x}dx$

integralinde $e^x=t$ dönüşümü yapılırsa hangi ifade elde edilir?

9. $\int_{e}^{e^2} \frac{1}{x}\left(\ln x+\ln^2 x\right)dx$

integralinde lnx = u dönüşümü yapılırsa hangi ifade elde edilir?

1. $\int_{1}^{e^3} \frac{1}{x\left(1+\ln^2 x\right)}dx$

integralinde lnx = u dönüşümü yapılırsa hangi ifade elde edilir?

2. $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{2\cos x}{\sin x+\sin^2 x}dx$

integralinde sinx = t dönüşümü yapılırsa hangi ifade elde edilir?

3. $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} (\sin x-\cos x)dx$

integralinde $t=\pi-x$ dönüşümü yapılırsa hangi ifade elde edilir?

4. $\int_{0}^{\frac{1}{2}} \sin(\arccos x)dx$

integralinde t = arccosx dönüşümü yapılırsa hangi ifade elde edilir?

5. $\int_{0}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \cos(\arcsin x)dx$

integralinde t = arcsinx dönüşümü yapılırsa hangi ifade elde edilir?

6. $\int_{0}^{1} \sin(\arctan x)dx$

integralinde t = arctanx dönüşümü yapılırsa hangi ifade elde edilir?

7. $\int_{2}^{7} \left(x+\sqrt{x+2}\right)dx$

integralinde $u^2-2=x$ dönüşümü yapılırsa hangi ifade elde edilir?

8. $\int_{1}^{4} x \cdot e^{\sqrt{x}}\, dx$

integralinde $\sqrt{x}=t$ dönüşümü yapılırsa hangi ifade elde edilir?

9. $\int_{0}^{3} x \cdot \sqrt{9-x^2}\, dx$

integralinde x = 3sint dönüşümü yapılırsa hangi ifade elde edilir?

10. $\int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\, dx$

integralinde x = sint dönüşümü yapılırsa hangi ifade elde edilir?

11. $\int_{0}^{2} \sqrt{4+x^2}\, dx$

integralinde x = 2tant dönüşümü yapılırsa hangi integral elde edilir?

12. $\int_{0}^{1} \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\, dx$

integralinde tant = x dönüşümü yapılırsa hangi ifade elde edilir?

1. $\int_{1}^{4} \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\, dx$

İntegralinde $u=\sqrt{x}$ dönüşümü yapılırsa hangi ifade elde edilir?

2. $\int_{0}^{3} \frac{\sqrt{x+1}}{x}\, dx$

integralinde $x+1=u^2$ dönüşümü yapılırsa hangi ifade elde edilir?

3. $\int_{-3}^{0} \frac{x}{\sqrt{1-x}}\, dx$

integralinde $x=1+u^2$ dönüşümü yapılırsa hangi ifade elde edilir?

Şu soruda x + 2 = u demek lâzım. Niye ki?

4. $\int_{1}^{5} f(x)dx = 8$

olduğuna göre, $\int_{-1}^{3} f(x+2)dx$ ifadesinin değeri kaçtır?

Şunda 2x + 1 = u demek lâzım.

5. $\int_{1}^{5} f(x)dx = 20$

olduğuna göre, $\int_{0}^{2} f(2x+1)dx$ ifadesinin değeri kaçtır?

Şunda 3x = u demek lâzım.

6. $\int_{3}^{6} f(x)dx = 12$

olduğuna göre, $\int_{1}^{2} f(3x)dx$ ifadesinin değeri kaçtır?

7. $\int_{1}^{2} f(3x-1)dx = 8$

olduğuna göre, $\int_{2}^{5} f(x)dx$ **ifadesinin değeri kaçtır?**

8. $\int_{0}^{3} f(x^2+1)dx = 18$

olduğuna göre, $\int_{1}^{10} x \cdot f(x)dx$ **ifadesinin değeri kaçtır?**

Köklü ifade olunca köklü ifadeye u demek lâzım.

9. $\int_{0}^{3} \frac{x+3}{\sqrt{x+1}} dx$

integralinin değeri kaçtır?

10. $\int_{0}^{4} \frac{4x}{\sqrt{2x+1}} dx$

integralinin değeri kaçtır?

11. $\int_{1}^{5} \frac{6x}{\sqrt{2x-1}} dx$

integralinin değeri kaçtır?

12. $\int_{-1}^{0} \frac{x^2}{\sqrt{x+1}} dx$

integralinin değeri kaçtır?

Parçalı Fonksiyonun İntegrali

Parçalı fonksiyon integralinin hiçbir özelliği yok. Sadece şuna dikkat edin. Parçalı fonksiyonun integrali hesaplanırken fonksiyonun kritik değerleri (sınır değerleri) integralin sınırları arasında ise bu değerlere göre integral parçalanır ve iki (parça sayısına göre üç te olabilir.)farklı integralin toplamı biçiminde yazılır. Gerisi bildiğiniz gibi☺

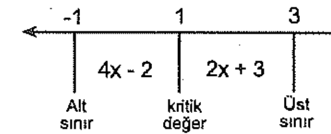
Örnek Soru

$$f(x) = \begin{cases} 4x-2, & x<1 \text{ ise} \\ 2x+3, & x \geq 1 \text{ ise} \end{cases}$$

olduğuna göre, $\int_{-1}^{3} f(x)dx$ **integralinin değeri kaçtır?**

Çözelim☺

İntegralin sınırları −1 ve 3. Ve verilen fonksiyonun kritik değeri 1. İlk bakmanız gereken kritik değerin sınırlar arasında olup olmadığıdır. Ki bunda sınırlar arasında. Dolayısıyla bu durumda integralin iki farklı integralin toplamı biçiminde yazılması lâzım.
Yazıp toplayalım bakalım.
Önce tablo üzerinde nerede hangi parçayı kullanacağınızı görün isterseniz.



Şu şekilde;

$$\int_{-1}^{3} f(x)dx = \int_{-1}^{1} (4x-2)dx + \int_{1}^{3} (2x+3)dx$$

Bunu hesaplarsınız artık☺
Ama problemi olanlar için bir defaya mahsus göstereyim yine.

$$\int_{-1}^{1} (4x-2)dx + \int_{1}^{3} (2x+3)dx = 2x^2-2x\Big|_{-1}^{1} + x^2+3x\Big|_{1}^{3}$$

gerisini hesaplayın artık☺
Cevap kaç?
10 çıkıyor di mi?

1. $f(x) = \begin{cases} 4, & x<0 \text{ ise} \\ 2x+3, & x \geq 0 \text{ ise} \end{cases}$

olduğuna göre, $\int_{-2}^{2} f(x)dx$ **integralinin değeri kaçtır?**

2. $f(x) = \begin{cases} 2x-3, & x>1 \text{ ise} \\ 3x^2+1, & x \leq 1 \text{ ise} \end{cases}$

olduğuna göre, $\int_{0}^{2} f(x)dx$ **integralinin değeri kaçtır?**

3. $f(x) = \begin{cases} 6x^2, & x>1 \text{ ise} \\ 8x-10, & x \leq 1 \text{ ise} \end{cases}$

olduğuna göre, $\int_{-1}^{3} f(x)dx$ **integralinin değeri kaçtır?**

4. $f(x)=\begin{cases} 4-x, & x<2 \text{ ise} \\ 2x+3, & x\geq 2 \text{ ise} \end{cases}$

olduğuna göre, $\int_0^3 f(x)dx$ **integralinin değeri kaçtır?**

5. $f(x)=\begin{cases} 2x-1, & x<1 \text{ ise} \\ -x+3, & x\geq 1 \text{ ise} \end{cases}$

olduğuna göre, $\int_0^3 (x+f(x))dx$ **integralinin değeri kaçtır?**

6. $f(x-1)=\begin{cases} 2-x, & x<1 \text{ ise} \\ 2x+1, & x\geq 1 \text{ ise} \end{cases}$

olduğuna göre, $\int_1^2 f(x)dx$ **integralinin değeri kaçtır?**

7. $f(x)=\begin{cases} 3-x, & x<0 \text{ ise} \\ 4x-1, & x\geq 0 \text{ ise} \end{cases}$

olduğuna göre, $\int_{-2}^2 f(x+1)dx$ **integralinin değeri kaçtır?**

8. $f(x)=\begin{cases} -2x+1, & x<-1 \text{ ise} \\ 3x^2+1, & -1\leq x\leq 1 \text{ ise} \\ 2x+3, & x>1 \text{ ise} \end{cases}$

olduğuna göre, $\int_{-1}^2 f(x)dx$ **integralinin değeri kaçtır?**

9. $f(x)=\begin{cases} -\sin x, & x>\frac{\pi}{3} \text{ ise} \\ \cos x, & x\leq \frac{\pi}{3} \text{ ise} \end{cases}$

olduğuna göre, $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx$ **integralinin değeri kaçtır?**

Mutlak Değer Fonksiyonunun Belirli İntegrali

Mutlak değer fonksiyonunun integralinin zor bir tarafı yok. Ama ilk önce mutlak değer fonksiyonunun işaret tablosunu yapmak lâzım. (ki mutlak değerin hangi aralıklarda eksi hangilerinde artı açıldığını göresiniz.)

Mutlak değer fonksiyonunun belirli integralini hesaplarken kritik değer(ler)in integralin verilen sınırları arasında olup olmadığına bakın. Eğer sınırlar arasında ise bu sınırlara göre integralin sonucu iki veya duruma göre üç farklı integralin toplamı biçiminde yazın ve öyle hesaplayın.
Aslında olayın özeti tek cümleyle şu☺
Kritik noktalarda integrali parçalara ayırın!

Örnek Soru

$$\int_{-1}^{3} |3x^2-6x|dx$$

integralinin değeri kaçtır?

Çözelim☺
Sonra hoca kolayları çözüp kazıkları bize bırakıyor demeyin diye kazık olanı ben çözüyorum.☺
Mutlak değerli fonksiyonların integralinde en önemli olay kritik değerler ve bu değerlerin sınırlar arasında olup olmadığının tespitidir.
Onun için ilk adım bu.
Buradaki kritik değerler (mutlak değerin içini sıfır yapan değerler) $3x^2-6x=0$ dan $x=0$ ve $x=2$ dir. Bu değerlerde integrali parçalara ayırcaz.
İkinci olarak diğer bir önemli husus da mutlak değerin nerede artı nerede eksi açılacağının tespitidir. Bunu da tablo yaparak görcez.
Tabloyu yapalım. (Tablo yapmayı bilmeyenler lütfen eşitsizlik konusunda bu kısmı tekrar çalışsınlar. Bi zahmet☺)
Tabloda kritik değerlere ve integralin sınırlarına dikkat edin.

x		-1		0		2		3	
$\lvert 3x^2-6x \rvert$	+	alt sınır	+	kritik değer	- -	kritik değer	+	üst sınır	+

Şimdi integralin değerini hesaplayabiliriz. – 1 den 0 a kadar mutlak değeri artı, 0 dan 2 ye kadar eksi, 2 den 3 e kadar artı açıp sonucu bulcaz.
Bu durumda verilen integralin son hali şöyle olacak.

$$\int_{-1}^{0}(3x^2-6x)dx+\int_{0}^{2}(-3x^2+6x)dx+\int_{2}^{3}(3x^2-6x)dx$$

Artık bundan sonrasını hesaplarsınız.
Sonuç 12 galiba☺
Anladınız mı?
Özetlersek; mutlak değer integralinde sınırlar arasında kritik değer varsa bu değerlerde sınırlar değişiyor. Bir de mutlak değerin nerede artı nerede eksi açılacağını görmek için tablo yapılıyor.
Özeti bilem uzun☺

1. $\int_{-2}^{2} |x|dx$

integralinin değeri kaçtır?

2. $\int_{1}^{3} |x-1|dx$

integralinin değeri kaçtır?

3. $\int_{1}^{3} |2x-4|\,dx$

integralinin değeri kaçtır?

4. $\int_{-2}^{1} 2|x+1|\,dx$

integralinin değeri kaçtır?

5. $\int_{0}^{2} x\cdot|x-1|\,dx$

integralinin değeri kaçtır?

6. $\int_{0}^{2} |x^2-1|\,dx$

integralinin değeri kaçtır?

7. $\int_{0}^{1} |2x-1|\,dx$

integralinin değeri kaçtır?

8. $\int_{1}^{3} |x^2-2x|\,dx$

integralinin değeri kaçtır?

1. $\int_{-1}^{1} (|4x|+|-2x|)\,dx$

integralinin değeri kaçtır?

2. $\int_{0}^{2} (4x^2|x-1|)\,dx$

integralinin değeri kaçtır?

3. $\int_{0}^{2} (3x^2+|2x-2|)\,dx$

integralinin değeri kaçtır?

4. $\int_{-1}^{2} 3|x^2-2x|\,dx$

integralinin değeri kaçtır?

5. $\int_{0}^{4} |x^2-2x-3|\,dx$

integralinin değeri kaçtır?

6. $\int_{-2}^{2} |-x^2-4x+5|\,dx$

integralinin değeri kaçtır?

7. $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} |\sin x|\, dx$

integralinin değeri kaçtır?

8. $\int_{0}^{\pi} |\cos x|\, dx$

integralinin değeri kaçtır?

9. $\int_{-\pi}^{\pi} \sin|x|\, dx$

integralinin değeri kaçtır?

10. $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} |\cos x - \sin x|\, dx$

integralinin değeri kaçtır?

Şu iki soruda ilk önce cos un yanındaki 1 i yok edin.

11. $\int_{0}^{\pi} \sqrt{1-\cos 2x}\, dx$

integralinin değeri kaçtır?

12. $\int_{0}^{\pi} \sqrt{1+\cos 2x}\, dx$

integralinin değeri kaçtır?

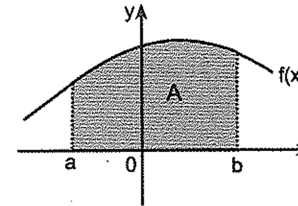
İNTEGRAL YARDIMIYLA ALAN HESABI

Bu kadar belirli integral antrenmanından sonra bu acayip kolay gelecek size. Hatta burada öyle sorular var ki "Bu kadar kolay şeyler de sorulur mu?" filan diyeceksiniz. ☺ Ama soruluyor işte.
Alan hesabında çok basit bir iki şeyi bilin yeter. Adım adım vereyim.

İlk önce
Eğri ile x ekseni arasındaki alanın nasıl bulunduğunu öğrenin.

y = f(x) eğrisi Ox ekseninin üst tarafında (+y tarafında) ise taralı alan y = f(x) fonksiyonunun a dan b ye kadar belirli integraline eşittir.

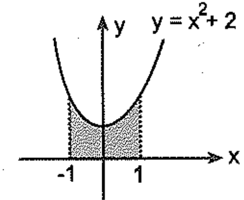
Neyi kastettiğimi önce taslak bir şekil üzerinde görün.



Yani, f(x) eğrisi, x = a, x = b doğruları ve x ekseni ile sınırlı bölgenin alanı $A = \int_{a}^{b} f(x)\, dx$ **tir.**

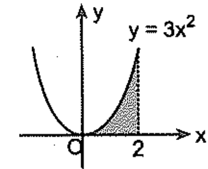
Buradaki en önemli şey integralin sınırları. Sınırlar verilmişse problem yok.
Ya hesaplanacak alanın sınırları verilmemişse?
Oturup bulacaksınız artık.☺ Ama merak etmeyin. Nasıl bulacağınızı söylicem.
Bir de şu var tabii. Fonksiyonun grafiği her zaman çizili olarak verilmeyecek. Onun için bazı önemli (Çok sorulduğu için önemli.☺) fonksiyonların grafiklerini çizebilmek lâzım.
Peki, ya fonksiyonun grafiğini çizemezseniz?
O zaman yandınız işte.☹ Şaka şaka.☺
Panik yapmayın. Grafiği çizmeyi beceremeseniz bile yine de istenilen alanı bulabilirsiniz.
Ama önce grafiğini çizdiğim fonksiyonlarda alan bulma olayını kavrayın bi.

1.



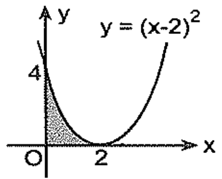
$y = x^2 + 2$ **eğrisi ve x = – 1, x = 1 doğruları ve x ekseni ile sınırlı alan kaç birim karedir?**

2.



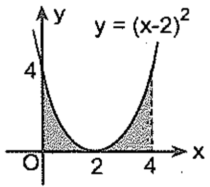
$y = 3x^2$ **eğrisi ve x = 2 doğrusu ve x ekseniyle sınırlı bölgenin alanı kaç birim karedir?**

3.



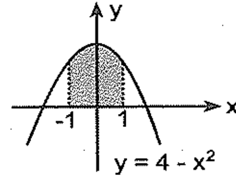
$y=(x-2)^2$ **eğrisi, x ekseni ve y ekseniyle sınırlı bölgenin alanı kaç birim karedir?**

4.



$y=(x-2)^2$ **eğrisi, x = 4 doğrusu x ekseni ve y ekseniyle sınırlı bölgenin alanı kaç birim karedir?**

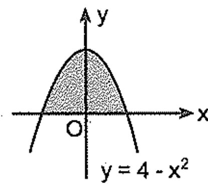
5.



$y=4-x^2$ **eğrisi ve x = – 1, x = 1 doğruları ve x ekseni ile sınırlı alan kaç birim karedir?**

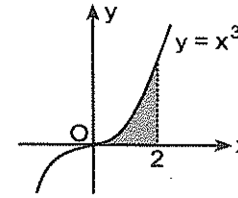
Eğer hesaplayacağınız alanın sınırları belli değilse sınırları siz bulacaksınız demektir. Hatırlayın x eksenini kesim noktalarını bulmak için y = 0 verip buluyorduk. Örneğin, alttaki soruda sınırlar $4-x^2=0$ dan 2 ve – 2 dir.

6.



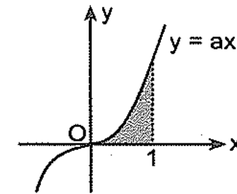
$y=4-x^2$ **eğrisi x ekseni ile sınırlı alan kaç birim karedir?**

1.



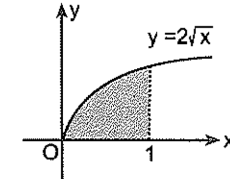
$y=x^3$ **eğrisi ve x = 2 doğrusu ve x ekseniyle sınırlı bölgenin alanı kaç birim karedir?**

2.



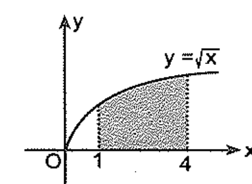
$y=ax^3$ **eğrisi ve x = 1 doğrusu ve x ekseniyle sınırlı bölgenin alanı 3 birim kare olduğuna göre a kaçtır?**

3.



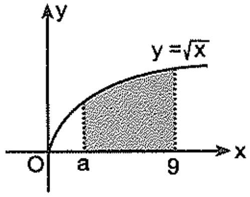
$y=2\sqrt{x}$ **eğrisi x = 1doğrusu ve x ekseni ile sınırlı alan kaç birim karedir?**

4.



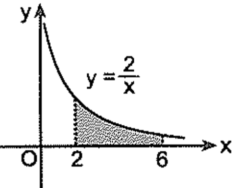
$y=\sqrt{x}$ **eğrisi x = 1, x = 4 doğruları ve x ekseni ile sınırlı alan kaç birim karedir?**

5.



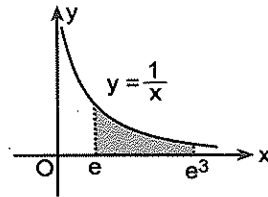
$y = \sqrt{x}$ **eğrisi, x = a, x = 9 ve x ekseniyle sınırlı alan $\frac{52}{3}$ birim kare olduğuna göre, a kaçtır?**

6.



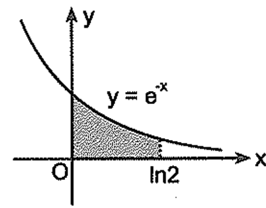
$y = \frac{2}{x}$ **eğrisi, x ekseni, x = 2 ve x = 6 doğrularıyla sınırlı alan kaç birim karedir?**

7.



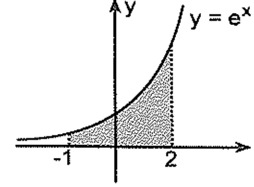
$y = \frac{1}{x}$ **eğrisi, x ekseni, x = e ve** $x = e^3$ **doğrularıyla sınırlı alan kaç birim karedir?**

8.



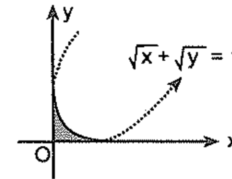
$y = e^{-x}$ **eğrisi x = 0, x = ln2 doğruları ve Ox ekseni ile sınırlı alan kaç birim karedir?**

1.



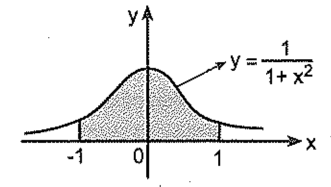
$y = e^x$ **eğrisi x = – 1, x = 2 doğruları ve Ox ekseni ile sınırlı alan kaç birim karedir?**

2.



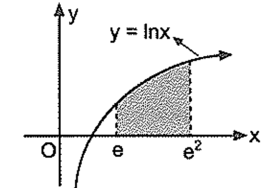
Şekilde grafiği verilen $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1$ **eğrisi ile eksenler arasındaki alan kaç birim karedir?**

3.



$y = \frac{1}{x^2+1}$ **eğrisi, x ekseni, x = – 1 ve x = 1 doğrularıyla sınırlı alan kaç birim karedir?**

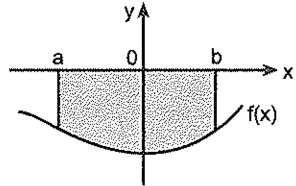
4.



y = lnx eğrisi, x ekseni, x = e ve x = e^2 doğrularıyla sınırlı alan kaç birim karedir?

Eğri Ox ekseninin altında olursa...

Hiçbir şey fark etmez.
En fazla işlem sonucu eksi çıkabilir. Ki bu da problem değil. Sonucu eksi ile çarpar bunu da artıya dönüştürürsünüz☺ Alan negatif olacak değil ya.
Bu tür alan hesaplarında şekil şöyle olabilir meselâ.



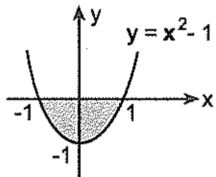
Eğri x ekseninin altındaysa, taralı alan, fonksiyonun a dan b ye kadar belirli integralinin eksilisine eşit olur.
Anladınız mı? ☺

Yani bu durumda taralı alan

$A=\int_a^b |f(x)|dx=\int_a^b -f(x)dx$ olur.

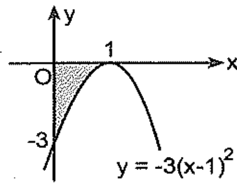
Aslında şöyle de yapabilirsiniz. Alanı normal şekilde bulun. Eğer eksi çıkarsa mutlak değerini alın olsun bitsin.☺

5.



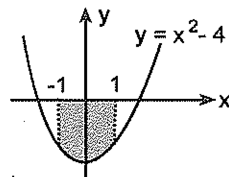
$y=x^2-1$ **eğrisi ile x ekseni arasındaki alan kaç birim karedir?**

6.



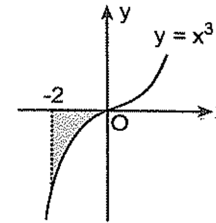
$y=-3(x-1)^2$ **eğrisi, x ekseni ve y ekseniyle sınırlı bölgenin alanı kaç birim karedir?**

7.



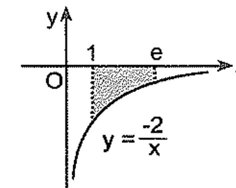
$y=x^2-4$ **eğrisi, x ekseni, x = – 1 ve x = 1 doğrularıyla sınırlı alan kaç birim karedir?**

1.



$y=x^3$ **eğrisi, x = – 2 doğrusu ve x ekseniyle sınırlı bölgenin alanı kaç birim karedir?**

2.



$y=-\frac{2}{x}$ **eğrisi, x = 1, x = e doğruları ve x ekseni ile sınırlı bölgenin alanı kaç birim karedir?**

Şimdi de size grafiği verilmeyen eğrilerle x ekseni arasındaki alanı bulmayı vereyim.

Fonksiyonun grafiği çizilmemişse istenilen alanı bulmak sanki zor muş gibi. Ama aslında gayet kolay. Göreceksiniz. Yeter ki dediklerime dikkat edin.
Eğer eğri ile x ekseni arasındaki alan soruluyorsa önce eğrinin x eksenini kesim noktalarını bulun.
(Bir eğrinin x eksenini kesim noktaları y = 0 vererek bulunuyordu. Hatırlayın.☺)
Sonra bulduğunuz değerlerden küçük olanı alt sınır büyüğünü de üst sınır olarak alın ve verilen fonksiyonun belirli integralini hesaplayın. Sonuç eksi çıkarsa artılısını alın. Ama eğri x eksenini üç farklı noktada kesiyorsa? O zaman aşağıda yaptığım gibi yapın☺
Ok☺

Örnek soru

$y=x-x^3$ **eğrisi ile x ekseni arasındaki sınırlı bölgenin alanı kaç birim karedir?**

Çözelim☺
Soruda grafik mirafik verilmemiş☺
Olsun. Problem değil. Grafiği çizmeden de yapabilirsiniz. Ama ilk önce verilen eğrinin x eksenini kesim noktalarını bulun.
Eğri, x eksenini $-x^3+x=0$ dan $x=-1$, $x=0$ ve $x=1$ de kesiyor.
İşte bu x değerleri integralin sınırları olacak.
İntegralin sınırları ilkinde bu değerlerden en küçüğü ile ortancası, ikincisinde ortancası ile en büyüğü olacak. İki integralin değerini de ayrı ayrı bulun. Ama sonucun eksi çıkma ihtimaline karşı da mutlak değerlerini alın ve toplayın.
Bu kadar basit işte. ☺
Demek istediğim şuydu.

$$\text{İstenen Alan}=\left|\int_{-1}^{0}\left(-x^3+x\right)dx\right|+\left|\int_{0}^{1}\left(-x^3+x\right)dx\right|$$

$\left|-\frac{1}{4}\right|+\left|\frac{1}{4}\right|=\frac{1}{2}$ birim karedir.

Ama verilen eğrinin grafiğini taslak olarak çizebilirseniz ne alâ.

Örnek soru

$y=-x^2+x+2$ eğrisi ile x ekseni arasındaki sınırlı bölgenin alanı kaç birim karedir?

Çözelim☺

Bu soruda da grafik çizilmemiş. (Genelde çizilmez zaten.) Olsun. Problem değil. Dedim ya grafiği çizmeyi beceremeseniz de çözebilirsiniz.

Şöyle yapın. İlk önce eğrinin x eksenini kesim noktalarını bulun.

Yani, $-x^2+x+2=0$ dan $x=-1$, $x=2$ yi bulun.

İşte bu değerler belirli integralin sınırları olacak.

Sonrası kolay.

$$\text{İstenenAlan}=\left|\int_{-1}^{2}\left(-x^2+x+2\right)dx\right|$$

Hesaplarsınız artık. $\frac{9}{2}$ yi buldunuz mu?

3. **$y=4-x^2$ eğrisi ile x ekseni arasındaki sınırlı bölgenin alanı kaç birim karedir?**

4. **$y=x^2-1$ eğrisi ile x ekseni arasındaki sınırlı bölgenin alanı kaç birim karedir?**

5. **$y=x^3-4x$ eğrisi ile Ox ekseni arasındaki alan kaç birim karedir?**

6. **$y=-3x^2+12$ eğrisi $x=0$ ve $x=1$ doğruları ve x ekseni arasındaki alan kaç birim karedir?**

7. **$y=x^2$ eğrisi, $x=2$ doğrusu ve x ekseniyle sınırlı alan kaç birim karedir?**

1. **$y=-x^3$ eğrisi, x ekseni, $x=-1$ ve $x=1$ doğrusu ile sınırlı bölgenin alanı kaç birim karedir?**

2. $a>0$ olmak üzere,
$y=ax^3$ eğrisi, x ekseni ve $x=1$ doğrusu ile sınırlı alan 3 birim kare olduğuna göre, a kaçtır?

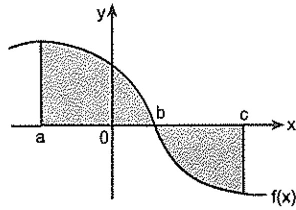
3. **$y=e^x$ eğrisi, $x=0$, $x=\ln3$ doğruları ve x ekseni arasındaki kapalı bölgenin alanı kaç birim karedir?**

4. **$y=\frac{2}{x}$ eğrisi $x=2$ ve $x=4$ doğrularıyla sınırlı alan kaç birim karedir?**

5. **$y=\cos x$ eğrisi, $x=0$, $x=\frac{\pi}{2}$ doğruları ve x ekseni arasındaki alan kaç birim karedir?**

6. **$y=\tan x$ eğrisi, $x=0$, $x=\frac{\pi}{6}$ doğruları ve x ekseniyle sınırlı bölgenin alanı kaç birim karedir?**

Hesaplanacak alanın bir kısmı x ekseninin altında bir kısmı üstündeyse...

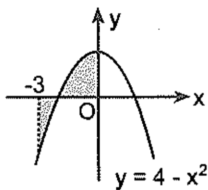


Şekildeki gibi eğer (a, c) aralığında eğrinin bir kısmı x ekseninin altında (– y tarafında) bir kısmı üstünde (+ y tarafında) ise o zaman taralı alan

$A=\int_a^b f(x)dx-\int_b^c f(x)dx$ tir.

Yani, bunun özeti şu; eğri ile x ekseni arasındaki alan; Eğri x ekseninin üstünde ise belirli integralle aynı, altında ise belirli integralin eksilisine eşittir.
Ve asıl şunu unutmayın. İntegralle alan hesabında eğrinin x eksenini kestiği noktalar muhakkaka bulunmalı. (kesiyorsa tabii ki)
Bu noktalar belirli integralin sınırlarıdır. Ve bu değerlerde integral parçalanır ve sınırlar ona göre düzenlenir.

Örnek soru



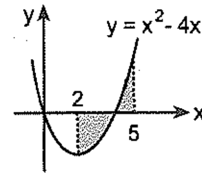
$y=4-x^2$ **eğrisi** $x=-3$ **ve** $x=0$ **doğruları ve x ekseni arasındaki alan kaç birim karedir?**

Çözelim☺
Bu soruda grafik verilmeyebilirdi de. Eğeri x eksenini x= – 2 ve x = 2 de kesiyor.
Bu durumda istenen alan bulunurken – 3 ten 0 a kadar değil. Önce – 3 ten – 2 ye kadar sonra da – 2 den 0 a kadar olan kısım ayrı ayrı bulunması lâzım.
Yani,

$$\text{İstenenAlan}=\left|\int_{-3}^{-2}\left(4-x^2\right)dx\right|+\left|\int_{-2}^{0}\left(4-x^2\right)dx\right|$$

Hesaplarsınız artık☺

7.



$y=x^2-4x$ **eğrisi,** $x=2$ **ve** $x=5$ **doğruları ile x ekseni arasındaki alan kaç birim karedir?**

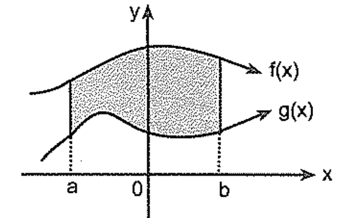
8. $y=x^2-2x$ **eğrisi, x ekseni,** $x=1$ **ve** $x=3$ **doğrularıyla sınırlı alan kaç birim karedir?**

1. $y=x^3$ **eğrisi,** $x=-1$ **ve** $x=2$ **doğruları ve x ekseniyle sınırlı alan kaç birim karedir?**

2. $y=x^3-x^2$ **eğrisi, x ekseni,** $x=0$ **ve** $x=2$ **doğrularıyla sınırlı alan kaç birim karedir?**

İki eğri arasındaki alan nasıl bulunur?

Önce taslak bi şekil çizeyim.

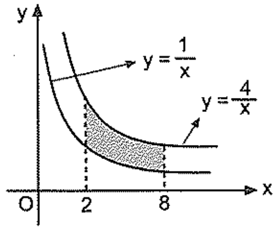


İki eğri arasındaki alanı hesaplarken öncekilerden farklı bir şey yapmayacaksınız.
Meselâ yukarıdaki şekilde taralı alanı bulurken f(x) ile x ekseni arasındaki alandan g(x) ile x ekseni arasındaki alanı çıkarmak lâzım.
Bunun da integralle ifadesi şu:

$A=\int_a^b [f(x)-g(x)]dx$ tir.

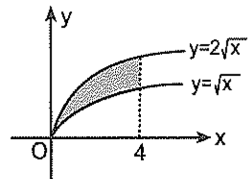
İki eğri arasındaki alanı bulurken daima üsttekinden alttakini çıkarın.☺
Ama **grafik çizilmemiş** ve **hangisinin üstte hangisinin altta olduğunu bilmiyorsanız o zaman kafanıza göre takılın☺ Yani, birinden diğerini çıkarın ve sonucu bulun. Eğer eksi çıkarsa çaktırmadan artı yapın.** Olsun bitsin.☺
Fakat sınır mınır verilmemiş ve iki eğri arsındaki alan sorulmuşsa o zaman sınırları siz bulacaksınız demektir.
Peki, sınırları nasıl bulacaksınız?
Hatırlıyor musunuz?
Hatırlatayım. y leri birbirine eşitliyorduk.
Meselâ $y=4-x^2$ parabolü ile $y=2x+4$ doğrusunun kesim noktaları $4-x^2=2x+4$ eşitliğinden $x=0$ ve $x=2$ dir.
Buradaki en önemli hususlardan biri kesim noktaların apsislerini doğru bulabilmek. Bu çok önemli. Ona göre. Çünkü bu noktalar integralin sınırları olacak.
Olayın özeti bu yani.

3.



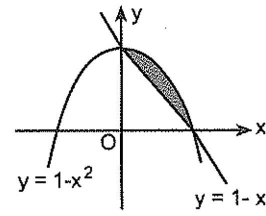
Şekildeki taralı alan kaç birim karedir?

4.



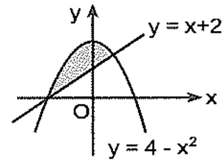
$y=\sqrt{x}$, $y=2\sqrt{x}$ eğrileri ve x = 4 doğrusuyla sınırlı alan kaç birim karedir?

5.



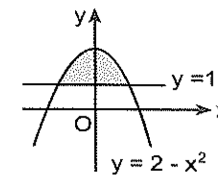
Şekildeki parabol ile doğru arasında kalan aklan kaç birim karedir?

6.



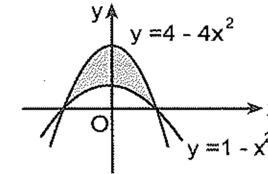
$y=4-x^2$ parabolü ile y = x + 2 doğrusu ile sınırlı kapalı bölgenin alanı kaç birim karedir?

1.



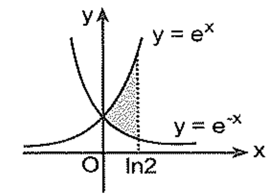
$y=2-x^2$ parabolü ile y = 1 doğrusuyla sınırlı kapalı bölgenin alanı kaç birim karedir?

2.



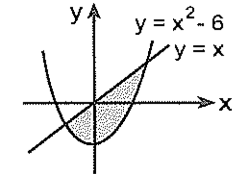
$y=1-x^2$ ve $y=4-4x^2$ eğrileriyle sınırlı bölgenin alanı kaç birim karedir?

3.



$y=e^x$, $y=e^{-x}$ eğrileri ve x = ln2 doğrusuyla sınırlı alan kaç birim karedir?

4.



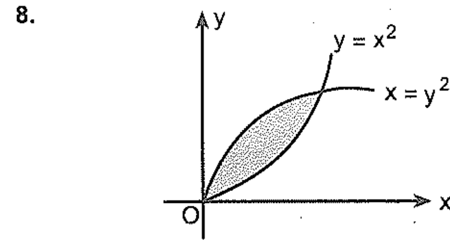
$y=x^2-6$ eğrisi ve y = x doğrusu ile sınırlı bölgenin alanı birim karedir?

5. $y = x^2 + x + 2$ eğrisi ve $y = 2x + 4$ doğrusuyla sınırlanan alan kaç birim karedir?

6. $y = x^2$ eğrisi ve $y = x + 2$ doğrusuyla sınırlanan alan kaç birim karedir?

7. $y = 2 - x^2$ eğrisi ve $y = x$ doğrusuyla sınırlanan alan kaç birim karedir?

8.



$y = x^2$ ve $x = y^2$ eğrileri ile sınırlanan alan kaç birim karedir?

1. $y^2 = 4x$

$y = 2x^2$

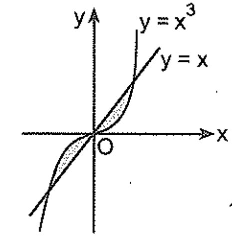
eğrileriyle sınırlı bölgenin alanı kaç birim karedir?

2. $x^2 = 2y$

$y^2 = 2x$

eğrileriyle sınırlanan bölgenin alanı kaç birim karedir?

3.



$y = x^3$ eğrisi ve $y = x$ doğrusuyla sınırlı (sonlu) bölgenin alanı kaç birim karedir?

4. $y = -x^3$ eğrisi ve $y = -4x$ doğrusuyla sınırlı (sonlu) bölgenin alanı kaç birim karedir?

5. $y = x^2 + x$

$y = -x^2 + x + 8$

eğrileriyle sınırlanan bölgenin alanı kaç birim karedir?

6. $y = 2x^2 - 1$

$y = x^2$

eğrileriyle sınırlanan bölgenin alanı kaç birim karedir?

7. $y = x^3$

$y = x^2$

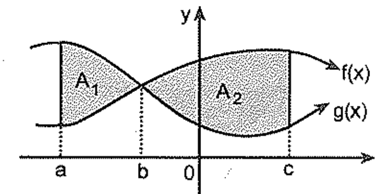
eğrileriyle sınırlanan bölgenin alanı kaç birim karedir?

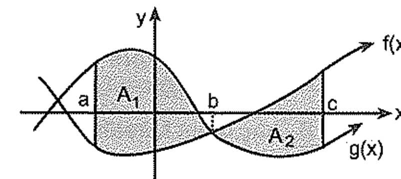
8. $y = \frac{2}{x}$ **eğrisi ve y = 3 – x doğrusunun sınırladığı alan kaç birim karedir?**

1. $y = e^x$, $y = 4e^{-x}$ **eğrileri ile x = ln2 ve x = ln4 doğrularıyla sınırlı alan kaç birim karedir?**

Eğer fonksiyonlar aşağıdaki şekildeki gibi kesişiyorsa taralı alanı iki ayrı integralin toplamı şeklinde yazarak bulun.
Kesim noktalarında sınırları değiştirin. (Demek ki ilk önce kesim noktalarını bulmak gerekiyor☺)

Daima üsttekinden alttakini çıkarın. Ya da her seferinde mutlak değer alın.





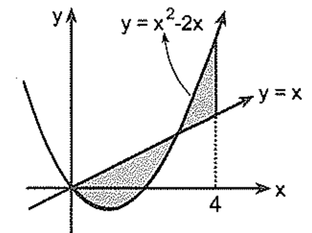
Üstteki şekillerde ki taralı alanlar şu şekilde hesaplanır.

$$A_1 + A_2 = \int_a^b [g(x) - f(x)]dx + \int_b^c [f(x) - g(x)]dx$$

Dikkat ettiniz mi?
İki eğri arasındaki alanı hesaplarken eğrilerin x ekseninin altında veya üstünde olmasının hiçbir önemi olmuyor.
Önemli olan hangisinin üstte olduğu.

2. **y = x + 2 doğrusu,** $y = x^2$ **eğrisi ve x = 1 ve x = 3 doğrularıyla sınırlı kapalı bölgenin alanı kaç birim karedir?**

3.



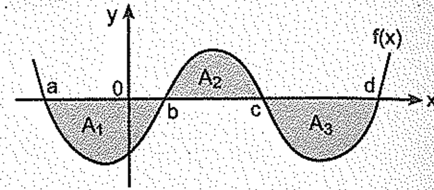
Şekildeki $y = x^2 - 2x$ **eğrisi ile y = x ve x = 4 doğrusu ile sınırlı taralı alan kaç birim karedir?**

4. $y = x^2$ **parabolü,** $y = \frac{1}{x}$ **eğrisi, x ekseni ve x = 3 doğrusuyla sınırlı alan kaç birim karedir?**

5. $y = 4 - x^2$, $y = x^2 - 4$ **eğrileri ve x = 1, x = 3 doğrularıyla sınırlı alan kaç birim karedir?**

Yalnız şu hususa dikkat edin.

Diyelim ki f(x) fonksiyonunun grafiği aşağıdaki gibi



Ve soruda size sorulan a dan d ye kadar belirli integral ise bu

$$\int_a^d f(x)dx = -A_1 + A_2 - A_3 \text{ tür.}$$

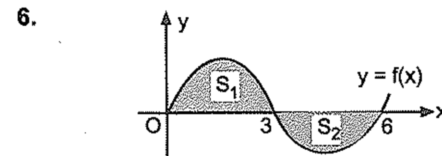
Ama sorulan a dan d ye kadar f(x) eğrisi ile x ekseni arasındaki alan ise bu

$$A_1 + A_2 + A_3 = \int_a^b -f(x)dx + \int_b^c f(x)dx + \int_c^d -f(x)dx \text{ tir.}$$

Yani anlayacağınız sadece belirli integral sorulursa cebirsel toplam yapıyor, alan sorulursa mutlak değer alıyorsunuz.(Zaten alan da negatif olmaz.)

Dikkat etmezseniz **yamulursunuz walla☺**

6.

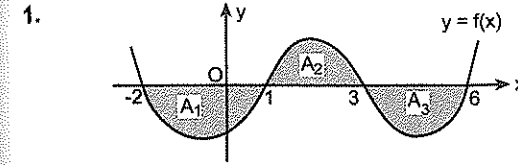


Yukarıda verilen taralı bölgelerin alanları sırasıyla S_1 ve S_2 dir.

$$\int_0^6 f(x)dx = 7 \text{ ve, } S_2 = 10 \text{ birim kare}$$

olduğuna göre, S_1 **kaç birim karedir?**

1.

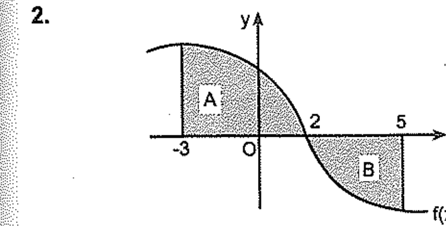


Şekilde y =f(x) fonksiyonunun grafiği verilmiştir.

$A_1 = 5\,br^2$, $A_2 = 3\,br^2$, $A_3 = 7\,br^2$

olduğuna göre, $\int_{-2}^{6} f(x)\,dx$ **kaçtır?**

2.

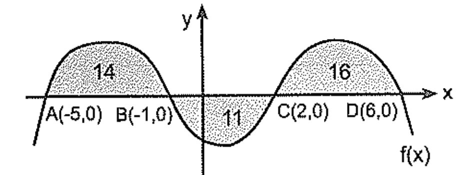


Şekilde f(x) fonksiyonunun grafiği verilmiştir.

$\int_{-3}^{5} f(x)dx = 8$, $\int_{-3}^{2} f(x)\,dx = 13$,

olduğuna göre, B alanı kaç birim karedir?

3.

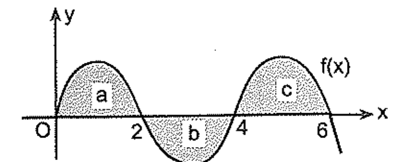


Yukarıdaki şekilde y = f(x) in grafiği verilmiştir.

x- ekseninin, AB yayı ile sınırladığı bölgenin alanı 14 birim kare, BC yayı ile sınırladığı bölgenin alanı 11 birim kare, CD yayı ile sınırladığı bölgenin alanı 16 birim kare olduğuna göre,

$\int_{-5}^{6} f(x)\,dx$ **değeri kaçtır?**

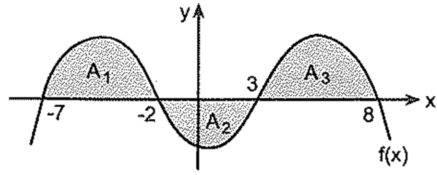
4.



Yukarıda verilen taralı bölgelerin alanları sırasıyla a, b ve c dir.

Buna göre, $\int_0^6 |f(x)|\,dx - \int_0^6 f(x)dx$ **değeri nedir?**

5.

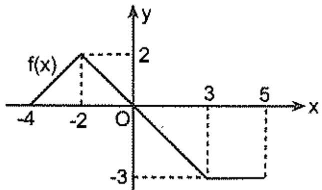


Şekilde f(x) fonksiyonunun grafiği verilmiştir.

$\int_{-7}^{8} f(x)dx = 10$, $\int_{-2}^{3} f(x)dx = 2$, $\int_{3}^{8} f(x)dx = 6$

olduğuna göre, $\int_{-7}^{8} |f(x)|dx$ **kaçtır?**

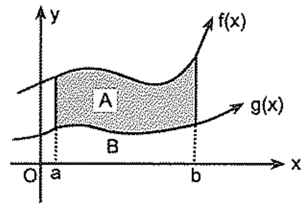
6.



Şekilde f(x) fonksiyonunun grafiği verilmiştir.

Buna göre, $\int_{-4}^{5} f(x)dx$ **kaçtır?**

7.

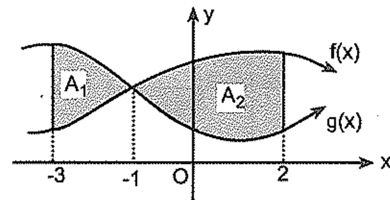


Şekilde f(x) ve g(x) fonksiyonlarının grafikleri verilmiştir.

$\int_{a}^{b} f(x)dx = 20$, $\int_{a}^{b} g(x)dx = 6$

olduğuna göre, A – B farkı kaçtır?

8.



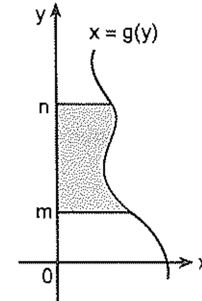
Şekilde f(x)ve g(x) fonksiyonlarının grafiği verilmiştir.

$\int_{-3}^{2} f(x)dx = 12$, $\int_{-3}^{2} g(x)dx = 10$,

olduğuna göre, $|A_1 - A_2|$ **farkı kaç birim karedir?**

Bir eğri ile y ekseni arasındaki alan nasıl bulunur?

Eğri ile y ekseni arasındaki alandan neyi kastettiğimi aşağıdaki şekle bakarak anlayın.



Aslında bir eğri ile y ekseni arasındaki alanın hesabı da öncekiler gibi.

Yalnız burada fonksiyonu y türünden yazmanız lâzım. (yani, x i yalnız bırakmanız lâzım.)

Örneğin üstteki şekildeki taralı alan

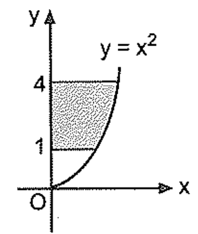
$A = \int_{m}^{n} g(y)dy$ dir.

Göreceksiniz zaten. Hiçbir zorluğu yok. Öncekilerin aynısı.☺ Ve bir şey daha.

Neyse... Vazgeçtim☺

1. $y = \sqrt{x}$ **eğrisi, Oy ekseni ve y = 1 ve y = 4 doğrularıyla sınırlı alan kaç birim karedir?**

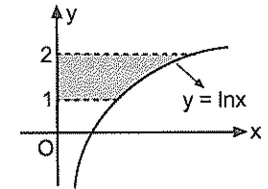
2.



x ≥ 0 olmak üzere,

$y = x^2$ **eğrisi, Oy ekseni ve y = 1 ve y = 4 doğrularıyla sınırlı alan kaç birim karedir?**

3.

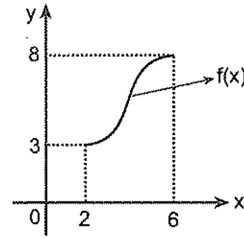


y = lnx eğrisi, y = 1, y = 2 doğruları ve y ekseniyle sınırlı alan kaç birim karedir?

4. $y = x^2 + 1$ eğrisi ve $y = 2$, $y = 5$ doğrularıyla sınırlı alan kaç birim karedir?

5. $y = e^x$ eğrisi, $y = e^3$ doğrusu ve y ekseni ile sınırlı alan kaç birim karedir?

6.

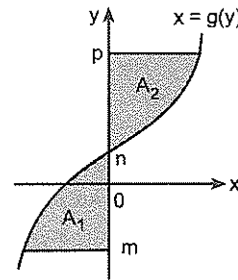


Şekilde grafiği verilen bire bir ve örten

$f : [2,6] \to [3,8]$ fonksiyonunun tersi f^{-1} dir.

Buna göre, $\int_2^6 f(x)dx + \int_3^8 f^{-1}(x)dx$ **toplamı kaçtır?**

Eğri y eksenini kesiyorsa...



Yani, hesaplanacak alanın bir kısmı y ekseninin sağında (+x tarafında) bir kısmı solunda (–x tarafında) ise

Yine aynı mantıkla üstteki şekilde verilen taralı alan

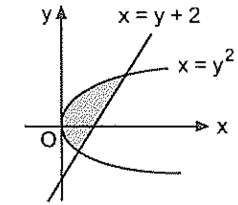
$$A_1 + A_2 = \int_m^n -g(y)\,dy + \int_n^p g(y)\,dy \text{ dir.}$$

Yani, + x tarafındakini aynen alıyor, – x tarafındakinin eksilisini alıyor ve topluyoruz.

1. $y = x^3$ eğrisi, $y = -1$, $y = 1$ doğruları ve y ekseniyle sınırlı alan kaç birim karedir?

2. $y = x^3 + 1$ eğrisi, Oy ekseni, $y = 0$ ve $y = 9$ doğrularıyla sınırlı alan kaç birim karedir?

3.



$y^2 = x$ **eğrisi ve** $x = y + 2$ **doğrusu ile sınırlı alan kaç birim karedir?**

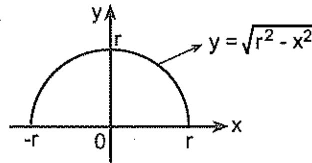
4. $y^2 = x$ eğrisi, $y = x - 2$ doğrusu ve y ekseniyle sınırlı alan kaç birim karedir?

Dairede alan bilgisi yardımıyla daha kolay çözülebilen integral soruları.

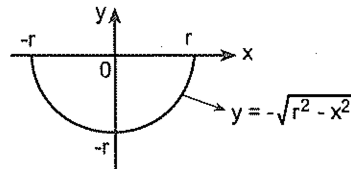
Herhalde aranızda dairenin, daire diliminin ve daire kesmesinin alanını hesaplayamayan çıkmaz☺ Var mı yoksa?

Dairede alan bilgisiyle çözülen sorularda karşınıza yarım çember denklemleri çıkacak. Onun için önce yarım çember denkleminden neyi kastettiğimi açıklayayım.

Merkezi orijinde M(0,0) ve yarıçapı r olan çember denklemi, $x^2 + y^2 = r^2$ idi. Bu denklemde y yi yalnız bırakırsanız, $y = \pm\sqrt{r^2 - x^2}$ olur.
Burada, çemberin x ekseninin üstünde kalan yarı parçasının denklemi, $y = \sqrt{r^2 - x^2}$ dir.

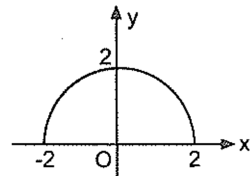


x ekseninin altında kalan yarı parçasını denklemi ise $y = -\sqrt{r^2 - x^2}$ dir.



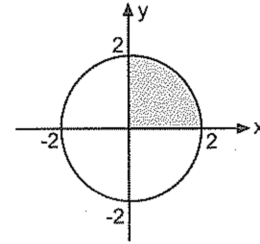
Bu iki yarım çember birleşince tam çember oluyor. Ama bu $x^2 + y^2 = r^2$ denkleminde x i yalnız bırakırsanız $x = \pm\sqrt{r^2 - y^2}$ olur.

Mesela $y = \sqrt{4 - x^2}$ denklemi merkezi orijinde, yarıçapı 2 birim olan aşağıdaki yarım çemberdir.



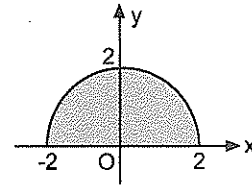
Sorularda ne demek istediğimi daha iyi anlayacaksınız.

5.



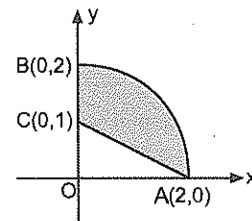
Şekildeki dik koordinat düzleminde verilen taralı alanın integral yardımıyla ifadesi nedir?

6.



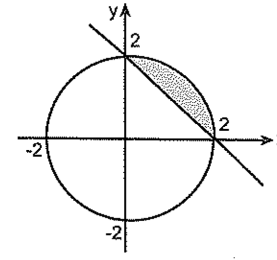
Şekildeki dik koordinat düzleminde verilen taralı alanın integral yardımıyla ifadesi nedir?

7.



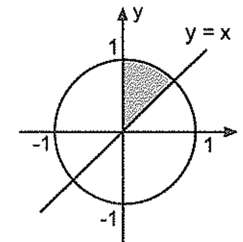
Şekildeki dik koordinat düzleminde verilen çeyrek çember ile doğru arasındaki taralı alanın integralle ifadesi nedir?

1.



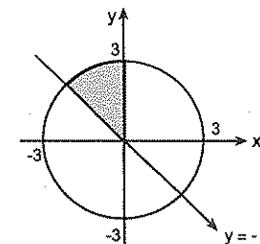
Şekildeki dik koordinat düzleminde verilen çember ile doğru arasındaki taralı alanın integral yardımıyla ifadesi nedir?

2.



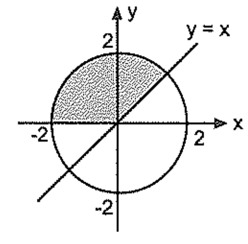
Şekildeki dik koordinat düzleminde verilen taralı alanın integral ile ifadesi nedir?

3.



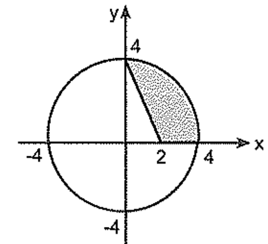
Şekildeki dik koordinat düzleminde verilen taralı alanın integral ile ifadesi nedir?

4.



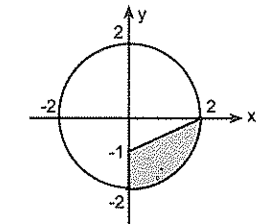
Şekildeki dik koordinat düzleminde verilen taralı alanın integralle ifadesi nedir?

5.



Şekildeki dik koordinat düzleminde verilen taralı alanın integralle ifadesi nedir?

6.



Şekildeki dik koordinat düzleminde verilen çember ile doğru arasındaki taralı alanın integral yardımıyla ifadesi nedir?

Tabii ki her zaman şekil hazır verilmez. Çoğu zaman yarım çember denklemini tanımanız ve şekli sizin çizmeniz gerekebilir. Bi zorluğu yok. Ama bilmeyince de çözülmüyor işte☺

7. $\int_{0}^{2} \sqrt{4-x^2}\,dx$

ifadesinin değeri kaçtır?

8. $\int_{0}^{6} \sqrt{36-x^2}\,dx$

ifadesinin değeri kaçtır?

9. $\int_{-4}^{0} \sqrt{16-x^2}\,dx$

ifadesinin değeri kaçtır?

10. $\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\,dx$

ifadesinin değeri kaçtır?

11. $\int_{0}^{\sqrt{2}} \left(\sqrt{4-x^2}-x\right)dx$

integralinin değeri kaçtır?

12. $\int_{0}^{1} \left(\sqrt{2-x^2}-x\right)dx$

integralinin değeri kaçtır?

1. $\int_{0}^{\sqrt{2}} \left(\sqrt{4-x^2}-x\right)dx$

integralinin değeri kaçtır?

2. $\int_{0}^{2} \left(\sqrt{4-x^2}-(-x+2)\right)dx$

integralinin değeri kaçtır?

3. $\int_{0}^{3} \left(\sqrt{9-x^2}+x-3\right)dx$

integralinin değeri kaçtır?

4. $\int_{0}^{1} \left(\sqrt{2-x^2}-x\right)dx$

integralinin değeri kaçtır?

5. $\int_{0}^{\frac{1}{2}} \left(\sqrt{1-x^2}-\sqrt{3}x\right)dx$

integralinin değeri kaçtır?

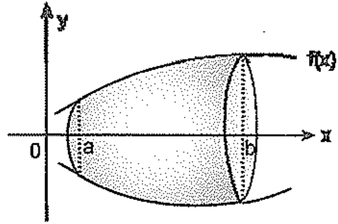
6. $\int_{0}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \left(\sqrt{1-x^2}-\frac{\sqrt{3}}{3}x\right)dx$

integralinin değeri kaçtır?

İNTEGRAL YARDIMIYLA HACİM HESABI

Hacim hesabıyla alan hesabındaki temel mantık aynıdır. Sadece burada fonksiyonun karesi alınıyor. Ve sonuç π ile çarpılıyor o kadar.

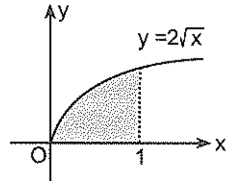
Bir eğri ile Ox ekseni arasındaki alanın Ox ekseni etrafında döndürülmesiyle oluşan cismin hacmi:



y = f(x) eğrisi, x ekseni, x = a ve x = b doğrularıyla sınırlı alanın x ekseni etrafında döndürülmesiyle oluşan dönel cismin hacmi,

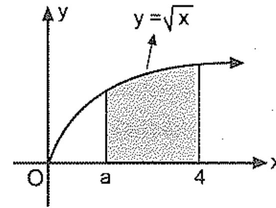
$V = \pi \int_a^b f^2(x)dx = \pi \int_a^b y^2 dx$ şeklinde hesaplanır.

7.



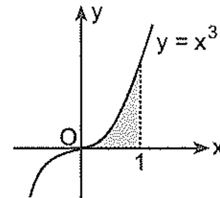
$y = 2\sqrt{x}$ eğrisi, x = 1 doğrusu ve x ekseni ile sınırlı alanın x ekseni etrafında döndürülmesiyle oluşan cismin hacmi kaç birim küptür?

8.



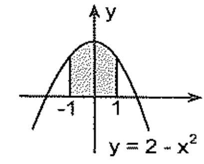
$y = \sqrt{x}$ eğrisi, x = a, x = 4doğruları ve x ekseni ile sınırlı alanın x ekseni etrafında döndürülmesiyle oluşan cismin hacmi 6 π birim küp olduğuna göre, a kaçtır?

9.



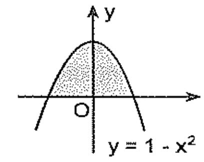
$y = x^3$ eğrisi, x ekseni ve x = 1 doğrusuyla sınırlı alanın Ox ekseni etrafında döndürülmesiyle oluşan cismin hacmi kaç birim küptür?

1.



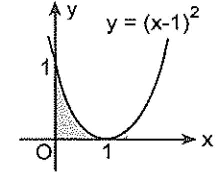
$y = 2 - x^2$ parabolü x = – 1, x = 1 doğruları ve x ekseniyle sınırlı alanın x ekseni etrafında döndürülmesiyle oluşan dönel cismin hacmi kaç birim küptür?

2.



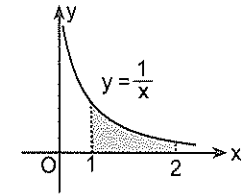
Şekilde grafiği verilen $y = 1 - x^2$ parabolünün x ekseniyle oluşturduğu sınırlı alanının x ekseni etrafında döndürülmesiyle oluşan cismin hacmi kaç birim küptür?

3.



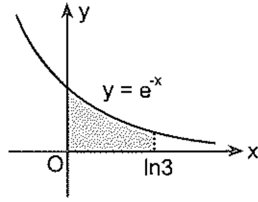
$y = (x-1)^2$ parabolünün eksenlerle oluşturduğu sınırlı alanının x ekseni etrafında döndürülmesiyle oluşan cismin hacmi kaç birim küptür?

4.



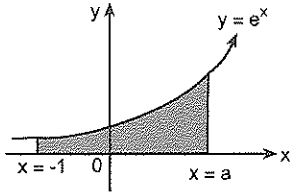
$y = \frac{1}{x}$ eğrisi, x = 1, x = 2 doğruları ve x ekseniyle sınırlı alanın Ox ekseni etrafında döndürülmesiyle oluşan cismin hacmi kaç birim küptür?

5.



Şekildeki verilen $y = e^{-x}$ eğrisi, x ekseni, y ekseni ve x = ln3 doğrularıyla sınırlı alanın x ekseni etrafında döndürülmesiyle oluşan cismin hacmi kaç birim küptür?

6.



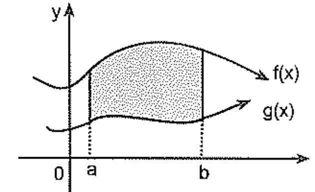
Şekildeki verilen $y = e^{x}$ eğrisi, x ekseni, x = – 1 ve x = a doğrularıyla sınırlı alanın x ekseni etrafında döndürülmesiyle oluşan cismin hacmi $\frac{\pi}{2}\left(e^{a+4} - e^{-2}\right)$ birim küp olduğuna göre, a kaçtır?

7. **$y = e^{x}$ eğrisi, x ekseni, x = 0 ve x = ln2 doğrusu ile sınırlı bölgenin x ekseni etrafında döndürülmesiyle oluşan cismin hacmi kaç birim küptür?**

8. **y = tanx eğrisi, Ox ekseni ve $x = \frac{\pi}{4}$ doğrularıyla sınırlı alanın Ox ekseni etrafında döndürülmesiyle oluşan cismin hacmi kaç birim küptür?**

İki eğri arasındaki alan x ekseni etrafında döndürülürse...

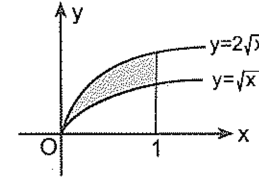
Bu da basit.
Üsttekinin oluşturduğu hacimden alttakinin oluşturduğunu çıkarırsın.



y = f(x), y = g(x) eğrisi, x ekseni, x = a ve x = b doğrularıyla sınırlı alanın x ekseni etrafında döndürülmesiyle oluşan dönel cismin hacmi,

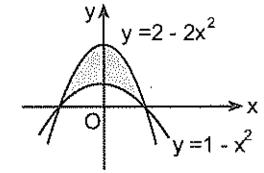
$V = \pi\int_a^b \left[f^2(x) - g^2(x)\right]dx$ şeklinde hesaplanır.

1.



Şekildeki $y = 2\sqrt{x}$ ve $y = \sqrt{x}$ eğrileri ve x = 1 doğrusuyla sınırlı alanın x ekseni etrafında döndürülmesiyle oluşan cismin hacmi kaç birim küptür?

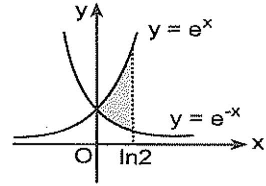
2.



Şekilde verilen $y = 2 - 2x^2$ ve $y = 1 - x^2$ parabolleri arasında kalan sınırlı alanın x ekseni etrafında döndürülmesiyle oluşan cismin hacmi kaç birim küptür?

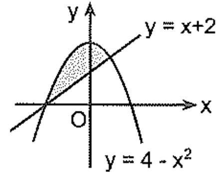
3. **$y = 2 - x^2$ ve $y = 4 - 2x^2$ eğrileri ile x = – 1 ve x = 1 doğrularıyla sınırlı alanın Ox ekseni etrafında döndürülmesiyle oluşan cismin hacmi kaç birim küptür?**

4.



Şekilde verilen $y = e^x$ ve $y = e^{-x}$ eğrileri ve $x = \ln 2$ doğrusuyla sınırlı alanın x ekseni etrafında döndürülmesiyle oluşan cismin hacmi kaç birim küptür?

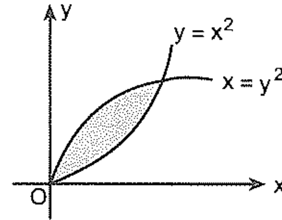
5.



Şekilde verilen $y = 4 - x^2$ parabolü ve $y = x + 2$ doğrusuyla sınırlı alanın x ekseni etrafında döndürülmesiyle oluşan cismin hacmi kaç birim küptür?

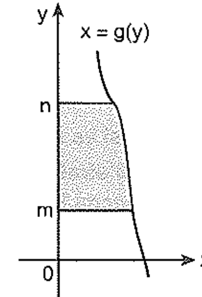
6. $y = 4 - x^2$ parabolü ve $y = 3$ doğrusuyla sınırlı alanın x ekseni etrafında döndürülmesiyle oluşan cismin hacmi kaç birim küptür?

7.



$y = x^2$ ve $x = y^2$ eğrileriyle sınırlı alanın x ekseni etrafında döndürülmesiyle oluşan cismin hacmi kaç birim küptür?

Eğri ile y ekseni arasındaki alan y ekseni etrafında döndürülürse...

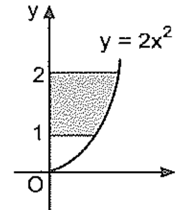


$x = g(y)$ eğrisi, y ekseni, $y = m$ ve $y = n$ doğrularıyla sınırlı alanın y ekseni etrafında döndürülmesiyle oluşan cismin hacmi

$$V = \pi \int_m^n g^2(y)\,dy = \pi \int_m^n x^2\,dx$$ şeklinde hesaplanır.

y ekseni etrafında döndürüyorsanız verilen denklemde x i yalnız bırakmanız lâzım. (yani, x in y türünden değerini bulmanız lâzım.)

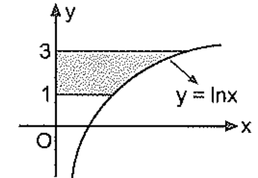
1.



Şekilde verileni $y = 2x^2$ eğrisi $y = 1$ ve $y = 2$ doğruları ve y ekseniyle y ekseni etrafında döndürülmesiyle oluşan cismin hacmi kaç birim küptür?

2. $y = x^3$ eğrisi, y ekseni, $y = 1$ doğrusuyla sınırlı alanın y ekseni etrafında döndürülmesiyle oluşan cismin hacmi kaç birim küptür?

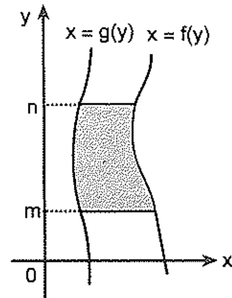
3.



$y = \ln x$ eğrisi, $y = 1$, $y = 3$ doğruları ve y ekseniyle sınırlı alanın y ekseni etrafında döndürülmesiyle oluşan cismin hacmi kaç birim küptür?

4. $y = x^3$ **eğrisi, y ekseni, y = 1 ve y = 8 doğrularıyla sınırlı alanın y ekseni etrafında döndürülmesiyle oluşan cismin hacmi kaç birim küptür?**

İki eğri arasındaki alan y ekseni etrafında döndürülürse...

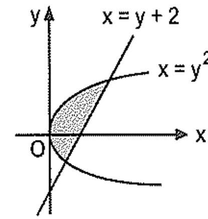


x = f(y), x = g(y) eğrisi, y = m ve y = n doğrularıyla sınırlı alanın y ekseni etrafında döndürülmesiyle oluşan cismin hacmi:

$V = \pi \int_{m}^{n} \left[f^2(y) - g^2(y)\right]dy$ şeklinde hesaplanır.

Aslında bütün alan ve hacim hesaplamalarındaki temel mantık aynı. Sadece küçücük bir formülü bilmek yetiyor☺

5.



Şekilde verileni $x = y^2$ **eğrisi ve x = y + 2 doğrularıyla sınırlı alanın y ekseni etrafında döndürülmesiyle oluşan cismin hacmi kaç birim küptür?**

6. $y = \sqrt{x}$ **eğrisi ve x = 1 doğrusuyla sınırlı alanın y ekseni etrafında döndürülmesiyle oluşan cismin hacmi kaç birim küptür?**

Cevaplar

Bir milletin geleceği hakkında kehanette bulunmak isteyenler o milletin gençliğine verilen terbiyeye baksınlar. Kehanetlerinde yüzde yüz isabet ederler.

***

CEVAPLAR

TOPLAM ve ÇARPIM SEMBOLÜ

1. Antrenman
Sayfa 9 – 10

1. 10
2. 15
3. 11
4. 64
5. 12
6. 18
7. 10
8. 21
9. 2
10. 9
11. 4
12. 13

2. Antrenman
Sayfa 11 – 12

1. 1
2. 4
3. 1
4. $\frac{15}{16}$
5. $\frac{91}{72}$
6. 0
7. 0
8. $-i$
9. 33
10. 26
11. -6
12. -11
13. 18
14. 5
15. 3
16. 6

3. Antrenman
Sayfa 13 – 14

1. 14
2. 30
3. 44
4. 58
5. 54
6. 15
7. 54
8. -9
9. $-\frac{15}{2}$
10. 108
11. 60
12. $\frac{15}{16}$
13. $\frac{23}{24}$
14. $\frac{1}{4}$
15. $\frac{27}{58}$

4. Antrenman
Sayfa 15 – 16

1. 45
2. 36
3. 5
4. 5
5. 4
6. 210
7. 155
8. 180

5. Antrenman
Sayfa 17 – 18

1. 170
2. 225
3. 108
4. 198
5. 186
6. 615
7. 3
8. 2
9. 4
10. 385
11. 2260
12. 1550
13. 1430
14. 570
15. 330
16. 380

6. Antrenman
Sayfa 19 – 20

1. 3025
2. 24100
3. 585
4. 420
5. $2^{16}-1$
6. $\frac{3^{12}-1}{2}$
7. $5^{12}-1$
8. 1
9. 7
10. 104
11. 54
12. 165
13. 395
14. $2^{16}-2$
15. 475
16. 335

7. Antrenman
Sayfa 21 – 22

1. a) $\sum_{k=1}^{12} 3k$
   b) $\sum_{k=1}^{25} (4k-1)$
2. a) $\sum_{k=1}^{12} (5k-13)$
   b) $\sum_{k=1}^{13} (5k-57)$
3. a) $\sum_{k=1}^{23} k(k+2)$
   b) $\sum_{k=1}^{13} 2k(2k+1)$
4. a) $\sum_{k=1}^{11} \frac{1}{k(k+1)}$
   b) $\sum_{k=1}^{10} \frac{1}{2k(2k+3)}$
5. a) $\sum_{k=1}^{21} \frac{k}{3k-1}$
   b) $\sum_{k=1}^{15} \frac{k}{k!}$
6. 860
7. 164
8. 312
9. 1395
10. 981
11. 3080
12. 5950
13. $\frac{7}{8}$
14. 2870

Çarpım Sembolü
8. Antrenman
Sayfa 23 – 24

1. 0
2. 0
3. 0
4. 0
5. 0
6. 0
7. 0
8. 0
9. 0
10. 0
11. $\frac{1}{89}$
12. 61
13. $\frac{1}{62}$
14. 6

9. Antrenman
Sayfa 25 – 26

1. 2^{10}
2. 3^{20}
3. 3
4. $3^{11}.11!$
5. $2^{7}.(7!)^{3}$
6. $2^{10}.11!$
7. $(15!)^{2}$
8. 5.8!.9!
9. $-(9!)^{2}$
10. $\frac{11}{20}$

10. Antrenman
Sayfa 27 – 28

1. $\frac{40}{13}$
2. 4
3. 81
4. 3^{231}
5. 2^{110}
6. 2^{54}
7. 225
8. 5
9. 0
10. 1440
11. $2^{20}.(4!)^{5}.(5!)^{4}$
12. 4
13. 4
14. 1

DİZİLER

1. Antrenman
Sayfa 31 – 32

1. 23
2. 100
3. 6
4. 6
5. 5
6. 6
7. 4
8. $\frac{3}{4}$
9. 5
10. 5
11. 6

2. Antrenman
Sayfa 33 – 34

1. 20
2. 49
3. 9
4. 0
5. 230
6. 2410
7. 40
8. 495
9. 33
10. 30
11. 18
12. 40
13. 9
14. 37
15. 15
16. 9

3. Antrenman
Sayfa 35 – 36

1. 4
2. 14
3. 4
4. 5
5. 10
6. 5
7. 5
8. 4
9. 13
10. 9
11. 7
12. 24
13. 4
14. $\frac{17}{60}$
15. $\frac{12}{13}$
16. $\frac{20}{21}$

4. Antrenman
Sayfa 37 – 38

1. 39
2. 13
3. 7
4. 113
5. $6n-6$
6. $7n-17$
7. 5
8. 7
9. 70
10. -86
11. 12
12. 7

5. Antrenman
Sayfa 39 – 40

1. 47
2. 10
3. 16
4. 40
5. 1
6. 2
7. 20
8. 24
9. 4
10. 12
11. 13
12. $2y-x$
13. 9
14. 6
15. 4

6. Antrenman
Sayfa 41 – 42

1. 5
2. $\frac{1}{2}$
3. 6
4. 5
5. 8
6. 3
7. 17
8. 85
9. 55
10. 12
11. 318
12. 600

7. Antrenman
Sayfa 43 – 44

1. 1010
2. 465
3. 414
4. 14
5. 130
6. 230
7. 285
8. 100
9. 14
10. 11
11. 17
12. 38
13. 700
14. 4
15. 33

8. Antrenman
Sayfa 45 – 46

1. 48
2. 48
3. 75
4. 2
5. 27
6. 5
7. 3
8. 2
9. $\frac{1}{\sqrt{3}}$
10. 25
11. 30
12. 4
13. 8

9. Antrenman
Sayfa 47 – 48

1. 5
2. 1
3. 4
4. 16
5. 1
6. 2
7. 2
8. 3
9. 2
10. 24
11. 3
12. 2
13. $2^{10}-1$
14. $3^{12}-1$

10. Antrenman
Sayfa 49 – 50

1. $\frac{3^{10}-1}{2}$
2. $3(2^{20}-1)$
3. $\sqrt{2}$
4. 54
5. 2
6. 24
7. 24
8. 2
9. 1
10. 4
11. 2
12. 2
13. -37
14. 24
15. 162

FONKSİYONLAR

1. Antrenman
Sayfa 53 – 54

1. a) 7
   b) 1
2. 7
3. 3
4. 2
5. -2

2. Antrenman
Sayfa 55 – 56

1. 2
2. 6
3. 3
4. 2
5. -2
6. 3
7. 0
8. a) 2
   b) 3
9. a) 2
   b) 3
   c) 4
   d) 5
10. a) 8
   b) 4
   c) 8

CEVAPLAR

3. Antrenman
Sayfa 57 – 58

1. 13
2. Tanım kümesi: $[-5,6)$
   Görüntü kümesi: $(-3,5]$
3. Tanım kümesi: $[-3,2)$
   Görüntü kümesi: $(-3,4]$
4. Tanım kümesi: R
   Görüntü kümesi: R
5. Tanım kümesi: $[-1,\infty)$
   Görüntü kümesi: $\{2\}$
6. Tanım kümesi: $[-1,\infty)$
   Görüntü kümesi: $(-\infty,3]$
7. Tanım kümesi: R
   Görüntü kümesi: $[0,\infty)$
8. Tanım kümesi: $R-\{2\}$
   Görüntü kümesi: $R-\{3\}$
9. Tanım K: $[-4,0)\cup(0,2)$
   Görüntü K: $(-3,0)\cup(2,4]$

4. Antrenman
Sayfa 59 – 60

1. Tanım K: $(-3,1)\cup(1,4]$
   Görüntü kümesi: $[-2,4]$
2. Tanım K: $(-4,2)\cup(2,5)$
   Görüntü kümesi: $(-3,6)$
3. 1
4. $(4,13)$
5. $\{4,6,8\}$
6. $[-5,3]$
7. $(-\infty,3]$
8. $[6,10]$
9. $[0,6]$

5. Antrenman
Sayfa 61 – 62

1. $[1,10]$
2. $[1,10]$
3. $[3,12]$
4. $[3,12]$
5. $R-\{1\}$
6. $[-1,3]$
7. $[1,4]$
8. $[1,7]$
9. $(-\infty,3)$ te pozitif
   $(3,\infty)$ te negatif
10. Daima pozitif
11. Daima negatif
12. $(-\infty,1)\cup(3,\infty)$ pozitif
   $(1,3)$ negatif
13. $(-\infty,0)\cup(4,8)$

6. Antrenman
Sayfa 63 – 64

1. $(-\infty,-2)$ de negatif
   $(-2,5)\cup(5,\infty)$ da pozitif
2. 4
3. 4
4. $(4,13)$
5. $(2,-1)$
6. 4
7. 2
8. -6
9. 3
10. 6
11. 19

7. Antrenman
Sayfa 65 – 66

1. 11
2. -1
3. 6
4. -3
5. 8
6. 2
7. -3

8. Antrenman
Sayfa 67 – 68

1. 2
2. 6
3. 7
4. 6
5. 10
6. 9
7. 11
8. 14

9. Antrenman
Sayfa 69 – 70

1. 3
2. 2
3. 2
4. 5
5. 5
6. a) $f^{-1}(x)=\frac{x+2}{3}$
   b) $f^{-1}(x)=5x+2$
   c) $f^{-1}(x)=-\frac{4x+2}{3}$
   d) $f^{-1}(x)=\frac{3x}{2}$
   e) $f^{-1}(x)=\frac{2x+3}{x}$
   f) $f^{-1}(x)=3x-6$
7. a) $f^{-1}(x)=\frac{2x+5}{x-3}$
   b) $f^{-1}(x)=\frac{3x+3}{x+4}$
   c) $f^{-1}(x)=\frac{3x-4}{x+1}$
   d) $f^{-1}(x)=\frac{x-4}{x+2}$
   e) $f^{-1}(x)=\frac{x+5}{3x}$
   f) $f^{-1}(x)=\frac{-3x}{2x-4}$
   g) $f^{-1}(x)=\frac{2x+3}{5x}$
8. a) $f^{-1}(x)=x^2+4x+4$
   b) $f^{-1}(x)=x^2-2x+3$
   c) $f^{-1}(x)=(x-2)^3$
   d) $f^{-1}(x)=8x^3-1$

10. Antrenman
Sayfa 71 – 72

1. a) $f^{-1}(x)=\sqrt{x-4}$
   b) $f^{-1}(x)=\sqrt{x-2}+3$
   c) $f^{-1}(x)=\sqrt{x+1}+2$
   d) $f^{-1}(x)=-\sqrt{x-1}-2$
2. a) $f^{-1}(x)=\arcsin\frac{x}{3}+2$
   b) $f^{-1}(x)=2\cos x+1$
3. a) $f^{-1}(x)=3^x-2$
   b) $f^{-1}(x)=\frac{5^x+3}{2}$
   c) $f^{-1}(x)=\frac{2^{x-1}+1}{4}$
4. a) $f^{-1}(x)=\log_2(x+3)$
   b) $f^{-1}(x)=\log_5\frac{x}{3}+2$

11. Antrenman
Sayfa 73 – 74

1. 11
2. 7
3. 13
4. 8
5. 42
6. 3
7. $f(x)=8x+1$
8. $f(x)=3x-1$
9. $f(x)=4x^2+6x+3$
10. $f(x)=4x^2-2$
11. $f(x)=2x^2-4x-1$
12. $f(x)=x^2+4x+4$
13. $f(x)=\frac{x^2-6x+13}{4}$
14. $f(x)=4x^2+12x+8$
15. -6
16.

12. Antrenman
Sayfa 75 – 76

1. a) b
   b) d
   c) a
2. a) c
   b) c
3. d
4. b
5. c
6. 1
7. 4
8. a
9. $\begin{pmatrix} a\,b\,c\,d \\ d\,b\,a\,c \end{pmatrix}$
10. $\begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4 \\ 1\,3\,4\,2 \end{pmatrix}$

13. Antrenman
Sayfa 77 – 78

1. I. Tek
II. Tek
III. Çift
IV. Çift veya tek değil
V. Çift
VI. Çift
2. 5
3. 12
4. 4
5. 2
6. 27
7. 2
8. 18
9. 26
10. 14
11. -1
12. 54

14. Antrenman
Sayfa 79 – 80

1. 8
2. 22
3. -3
4. 2
5. 3
6. 7
7. a) 9
b) 4
8. 6
9. $f(x-1)=\begin{cases}3x-1 & x\geq 2\\ -2x+3 & x<2\end{cases}$
10. $f(3x-6)=\begin{cases}3x-4 & x\geq 2\\ -3x+8 & x<2\end{cases}$
11. 3
12. – 6
13. -1
14. $\frac{1}{3}$
15. 28

15. Antrenman
Sayfa 81 – 82

1. 4
2. $-3x+5$
3. $3-x$
4. 6
5. $2b-2a-c$
6. $3a-2b$
7. $2a-4b$
8. $4-2x$
9. $-x^2-x+3$
10. 6
11. $4x-3$
12. x^2-x-1
13. – 1

16. Antrenman
Sayfa 83 – 84

1. $\{-4,4\}$
2. $\{-1,5\}$
3. $\{-4,1\}$
4. $\{1,4\}$
5. $\{1,3\}$
6. $\{-10,-6,0,4\}$
7. 6
8. 4
9. 2
10. 4
11. 2
12. – 4
13. 2
14. 2
15. 4
16. 1

17. Antrenman
Sayfa 85 – 86

1. 4
2. 4
3. C
4. D
5. – 3
6. $\frac{-2}{3}$
7. $\{-6,5\}$
8. $\frac{10}{3}$
9. $(1,3)$
10. 7
11. – 15
12. 4
13. 144
14. $(-2,1)\cup(3,6)$
15. 4
16. 6

18. Antrenman
Sayfa 87 – 88

1. 30
2. $[-2,0]\cup[2,4]$
3. $(-\infty,-1)\cup(1,\infty)$
4. $(-\infty,-2]\cup[1,\infty)$
5. $(-\infty,-7]\cup[5,\infty)$
6. – 4
7. 3
8. 1

19. Antrenman
Sayfa 89 – 90

1. C
2. D
3. A
4. B
5. B
6. C
7. A
8. B

20. Antrenman
Sayfa 91 – 92

1. D
2. A
3. D
4. C
5. A
6. D
7. B
8. A

21. Antrenman
Sayfa 93 – 94

1. 6
2. 0
3. 3
4. 3
5. 6
6. 7
7. 8
8. -1
9. 6
10. 6
11. -7
12. 11
13. $[2,\infty)$
14. $[-6,6]$

22. Antrenman
Sayfa 95 – 96

1. 5
2. 4
3. 3
4. 2
5. 10
6. 1
7. 2
8. 3

23. Antrenman
Sayfa 97 – 98

1. $(-\infty,2]$
2. $(-\infty,5]$
3. $[2,6]$
4. $[-1,3]$
5. $[1,6)$
6. $[-2,2]$
7. $[-1,1]$
8. $[-4,6]$
9. 4
10. 7
11. 12
12. 15
13. $(-\infty,-1)\cup[1,6)$
14. $[0,1]$
15. $[-1,2]$
16. $[-3,5]$

24. Antrenman
Sayfa 99 – 100

1. $R-\{2\}$
2. $\sqrt{10}$
3. 5
4. 10
5. 5
6. 10
7. $(3,\infty)$
8. $(-2,4)$
9. $(1,6)$
10. 9
11. 15
12. 9
13. 5
14. 18
15. $(0,4)-\{1\}$
16. 2

CEVAPLAR

LİMİT ve SÜREKLİLİK

1. Antrenman
Sayfa 105 – 106

1. a) 0
b) – 2
c) 0
d) 2
e) 4
2. a) 4
b) – 1
3. a) – 3
b) 4
4. a) 0
b) 2
c) 0
d) – 2
e) 4
5. a) – 4
b) 4
6. a) 3
b) -3
7. a) 3
b) 3
c) 6
d) 4
8. a) 1
b) 6
c) 5

2. Antrenman
Sayfa 107 – 108

1. a) 3
b) -1
c) 0
d) 0
2. a) $-\infty$
b) ∞
c) 2
d) 2
3. a) $-\infty$
b) ∞
c) ∞
d) $-\infty$
4. a) $-\infty$
b) $-\infty$
c) 2
d) 2
e) ∞
5. a) $-\infty$
b) $-\infty$
c) 4
d) 4
6. a) – 1
b) 2
c) – 2
d) 4
7. – 2 ve 1 de limit yoktur.
8. 2

3. Antrenman
Sayfa 109 – 110

1. 7
2. $\sqrt{2}$
3. – 5
4. 5
5. 3
6. 3
7. 1
8. 4
9. 4
10. 10
11. 8
12. -1
13. $\frac{1}{3}$
14. 6

4. Antrenman
Sayfa 111 – 112

1. 6
2. – 2
3. 1
4. 4
5. 1
6. 2
7. 9
8. 3
9. 3
10. 3
11. 2
12. 15
13. 11
14. 15
15. – 2
16. 7

5. Antrenman
Sayfa 113 – 114

1. a) 1
b) 11
c) 3
d) 3
2. 10
3. a) 3
b) 3
c) 3
d) Limit yoktur
4. 4
5. – 4
6. a) 5
b) 5
c) 5
d) 10
7. 7
8. 5

6. Antrenman
Sayfa 115 – 116

1. a) 2
b) 9
c) 3
d) 1
2. a) 2
b) 2
c) 2
d) limit yoktur.
3. a) – 1
b) – 1
c) – 1
d) – 11
4. a) 0
b) 6
c) 4
d) 0
5. 6
6. Limit yoktur
7. 8
8. 4
9. 17
10. – 5

7. Antrenman
Sayfa 117 – 118

1. ∞
2. $-\infty$
3. $-\infty$
4. ∞
5. ∞
6. $-\infty$
7. ∞
8. $-\infty$
9. $-\infty$
10. ∞
11. ∞
12. ∞
13. 4
14. 2
15. 6
16. 2
17. 3
18. a) ∞
a) $-\infty$
b) ∞
c) $-\infty$
d) $-\infty$
e) $-\infty$
f) $-\infty$
g) ∞
h) $-\infty$

8. Antrenman
Sayfa 119 – 120

1. $\frac{7}{4}$
2. 4
3. 2
4. $\frac{1}{2}$
5. 2
6. 0
7. 1
8. $\frac{1}{3}$
9. $2+\sqrt{3}$
10. 1
11. $\frac{1}{4}$
12. 4
13. – 1
14. 15°

9. Antrenman
Sayfa 121 – 122

1. $\frac{4}{3}$
2. 2
3. $\frac{1}{2}$
4. -8
5. $-\frac{1}{2}$
6. 1
7. $\frac{3}{2}$
8. – 4
9. 8
10. 32
11. $\frac{1}{4}$
12. 4x
13. $\frac{3}{2}$
14. $\frac{9}{2}$
15. $-\frac{3}{2}$

10. Antrenman
Sayfa 123 – 124

1. 2
2. $\frac{3}{2}$
3. 2
4. 2
5. – 2
6. $\sqrt{2}$
7. 1
8. -2
9. 0
10. 0
11. 0
12. 0
13. – 6
14. 1
15. – 2
16. 2

11. Antrenman
Sayfa 125 – 126

1. 4
2. 4
3. 2
4. 2
5. 3
6. 5
7. 3
8. 4
9. – 12
10. 4
11. 0
12. 4

12. Antrenman
Sayfa 127 – 128

1. 6
2. 6
3. 4
4. $\frac{1}{4}$
5. $\frac{3}{2}$
6. $\frac{1}{2}$
7. 1
8. 3
9. $\frac{3}{4}$
10. 3
11. 2
12. 2
13. $\frac{1}{4}$
14. 2
15. 2
16. 2

13. Antrenman
Sayfa 129 – 130

1. 2
2. 4
3. 2
4. 3
5. 24
6. 3
7. 2
8. 0
9. 0
10. 0
11. 0

14. Antrenman
Sayfa 131 – 132

1. ∞
2. ∞
3. ∞
4. 2
5. 9
6. $\frac{1}{2}$
7. 2
8. 2
9. 4
10. $\frac{-1}{2}$
11. 27
12. 3
13. 1
14. 5
15. – 5
16. 28

15. Antrenman
Sayfa 133 – 134

1. 8
2. 3
3. 6
4. $-\frac{3}{2}$
5. – 5
6. 3
7. $\frac{1}{2}$
8. 2
9. $-\frac{1}{3}$
10. 2
11. 2
12. 2
13. 4
14. 3
15. 2
16. 0

16. Antrenman
Sayfa 135 – 136

1. $-\frac{1}{2}$
2. $-\frac{1}{6}$
3. $-\frac{1}{4}$
4. $-\frac{1}{3}$
5. – 1
6. – 1
7. $-\frac{1}{4}$
8. – 1
9. 5
10. 1
11. 7
12. 2
13. 4
14. 3

17. Antrenman
Sayfa 137 – 138

1. ∞
2. 3
3. 2
4. 3
5. 1
6. – 3
7. $-\infty$
8. 2
9. – 4
10. 6
11. 5
12. 6
13. – 6
14. 12

18. Antrenman
Sayfa 139 – 140

1. 2
2. 6
3. 8
4. 5
5. e^2
6. e^{-4}
7. e^6
8. e^3
9. e^2
10. e^6
11. e
12. e^4
13. $e^{\frac{8}{3}}$
14. e^8

19. Antrenman
Sayfa 141 – 142

1. 4
2. 3
3. – 1
4. 4
5. 0
6. ∞
7. 6
8. 2
9. 5
10. e^6
11. 3
12. 3
13. 6
14. 2

20. Antrenman
Sayfa 143 – 144

1. $\frac{1}{2}$
2. 1
3. $\frac{1}{2}$
4. 4
5. 4
6. $\frac{9}{2}$
7. $\frac{2}{3}$
8. $\frac{2b}{2b-a}$
9. 2
10. $\frac{9}{2}$
11. $\frac{16}{3}$
12. $\frac{2}{5}$

21. Antrenman
Sayfa 145 – 146

1. 25
2. 14
3. 16π
4. 36
5. $8\pi + 16$
6. $36\sqrt{3}$
7. $\frac{4\sqrt{3}}{3}$
8. $32 + 16\sqrt{2}$
9. 72
10. 12π

22. Antrenman
Sayfa 147 – 148

1. 5
2. 0
3. 4
4. 3
5. 3
6. 1
7. 13
8. – 14

23. Antrenman
Sayfa 149 – 150

1. 8
2. – 9
3. 6
4. 4
5. 1
6. 2
7. 2
8. 5
9. 3
10. 2
11. 3
12. 1
13. – 2
14. 5

24. Antrenman
Sayfa 151 – 152

1. 8
2. 1
3. $[5, \infty)$
4. $(-\infty, 2)$
5. R
6. $R - \{0, 2\}$
7. $[5, \infty)$
8. 27
9. 11
10. 9
11. $(3, 5]$
12. $[-5, -2) \cup (1, \infty)$
13. $(-\infty, -3) \cup [1, 4)$
14. $[-2, 5]$
15. $(-\infty, -1] \cup (5, \infty]$
16. $(4, \infty)$

TÜREV ALMA KURALLARI

1. Antrenman
Sayfa 155 – 156

1. $3x^2$
2. 1
3. -3
4. $\frac{3}{4}$
5. $2x^5$
6. $15x^4$
7. $12x^7$
8. $\frac{5}{3}$
9. $-x^{-2}$
10. $-\frac{1}{x^2}$
11. $\frac{1}{2\sqrt{x}}$
12. $\frac{3}{4.\sqrt[4]{x}}$
13. $\frac{15}{2}x^4$
14. $-6x$
15. $\frac{3}{x\sqrt{x}}$
16. $\frac{6}{x^4}$
17. $\frac{12}{x^5}$
18. $2x^5$
19. $\frac{3}{x^5}$
20. $8x$
21. $-6x^2$
22. $\frac{2}{\sqrt{x}}$
23. $-\frac{4}{3x^3}$
24. $10t$
25. $12a^2$
26. $-6m$

2. Antrenman
Sayfa 157 – 158

1. $6x - 2$
2. $15x^2 - 4x$
3. $4x^5 - 5x^4 - 4$
4. 3
5. $2x + \frac{1}{\sqrt{x}}$
6. $2x^9 - 4x^5$
7. $8x^3 - 10x + 3$
8. $6x^2 + \frac{2}{x^2}$
9. $6t^2 - 4$
10. $3t^2 - 12t - 3$
11. $6x^2 + 2x$
12. $x^3 + x^2$
13. $-18x^5 + 30x^4$
14. 80
15. 1
16. 5
17. 4
18. 3
19. 2
20. 5

3. Antrenman
Sayfa 159 – 160

1. 1
2. 0
3. 16
4. – 1
5. 18
6. 4
7. 2
8. 11
9. 2
10. $\frac{6}{(3x+1)^2}$
11. $\frac{-1}{(3x+2)^2}$
12. $\frac{x^2 - 2x - 1}{(x-1)^2}$
13. $\frac{6 - 3x^2}{(x^2+2)^2}$
14. $-\frac{2x^2 + 2x + 2}{(x^2-1)^2}$
15. $\frac{3}{2}$
16. 3
17. – 2
18. $-\frac{4}{3}$
19. 3

4. Antrenman
Sayfa 161 – 162

1. 10
2. 1
3. 16
4. 5
5. – 4
6. 2

5. Antrenman
Sayfa 163 – 164

1. a) 1
   b) 3
2. – 1 ve 2 de
3. 4
4. Yoktur
5. – 4
6. 20
7. – 7
8. 13
9. – 3
10. $\frac{17}{9}$
11. $-\frac{1}{4}$
12. 4
13. 7

6. Antrenman
Sayfa 165 – 166

1. – 12
2. 5
3. $\frac{8}{3}$
4. 6
5. $\frac{25}{3}$
6. 21
7. $12x(x^2 - 3)^2$
8. $\frac{29}{3}$
9. 4
10. 2
11. 10
12. 16
13. $8(2x-1)^3$
14. $3(x^2 - x)^2.(2x-1)$
15. $10(x^2 - 2x + 3)^4.(x-1)$

CEVAPLAR

7. Antrenman
Sayfa 167 – 168

1. $-12x\left(3x^2-1\right)^{-3}$
2. $\frac{8}{3}(4x+3)^{-\frac{1}{3}}$
3. $-12(2x-5)^{-4}$
4. $\frac{12x+6}{\left(x^2+x\right)^3}$
5. $\frac{1}{2\sqrt{x+1}}$
6. $\frac{3}{2\sqrt{3x-2}}$
7. $\frac{3x+2}{2\sqrt{x+1}}$
8. $\frac{1}{2}$
9. $\frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x+1}}$
10. $\frac{3x^2-2}{2\sqrt{x^3-2x}}$
11. $-\frac{3}{2}(2x+1)^{-\frac{5}{4}}$
12. $\frac{1}{3}$
13. $-\frac{3}{8}$
14. -3
15. 54
16. 12
17. $2^4 . 3^8$
18. 3600

8. Antrenman
Sayfa 169 – 170

1. 2
2. $\frac{5}{3}$
3. $\frac{7}{3}$
4. $-\frac{19}{4}$
5. 4
6. 96
7. -22
8. $\frac{1}{4}$
9. 49

9. Antrenman
Sayfa 171 – 172

1. 1200
2. -30
3. 52
4. -280
5. -120
6. $\frac{5}{2}$
7. $\frac{12}{5}$
8. 5
9. 7
10. $\frac{25}{9}$
11. $\frac{21}{32}$

10. Antrenman
Sayfa 173 – 174

1. $-\frac{2y+4}{2x-3}$
2. $-\frac{5y-4}{5x+3}$
3. $-\frac{10x+2y}{-9y^2+2x}$
4. $\frac{3y-4}{4y-3x}$
5. $-\frac{6x-2y^3+1}{-6xy^2+3}$
6. -1
7. $-\frac{4}{3}$
8. $\frac{4}{3}$
9. $\frac{3}{4}$
10. -1
11. -1
12. -1

11. Antrenman
Sayfa 175 – 176

1. $\cos x-\sin x$
2. $2+\tan^2 x+\cot^2 x$
3. $3x^2+3\sin x$
4. $\sin x+x\cos x$
5. $\tan^2 x$
6. $\frac{x.\cos x-\sin x}{x^2}$
7. $\frac{2x.\cos x+x^2\sin x}{\cos^2 x}$
8. $4\left(1+\tan^2 4x\right)$
9. $-3\sin(3x+1)$
10. $4\cos(4x+2)$
11. $-(2x-5)\left(1+\cot^2\left(x^2-5x\right)\right)$
12. $5\sin(3-5x)$
13. $2\left(1+\tan^2(2x-1)\right)$
14. $-2x\left(1+\cot^2\left(x^2+2\right)\right)$
15. $\cos(1+\cos x).(-\sin x)$
16. $-2\sin 2x$
17. $-4\sin 4x$
18. $8\sin 8x$
19. $\cos 2x$
20. $5\cos 5x$
21. $-3\sin 3x$
22. $\sin 2x$
23. $4(1+\sin 2x)\cos 2x$
24. $-3\cos^2 x.\sin x$

12. Antrenman
Sayfa 177 – 178

1. $-10\cos^4(2x+3).\sin(2x+3)$
2. $2\sin(4x-2)$
3. $\frac{\cos x}{2\sqrt{\sin x}}$
4. $\frac{\sin x}{\cos^2 x}$
5. $-\frac{\cos x}{\sin^2 x}$
6. $\frac{2\sin x}{\cos^3 x}$
7. $4\sin 8x$
8. 8
9. $-\frac{\sqrt{2}}{2}$
10. 8
11. 12
12. 1
13. $-\frac{2}{3}$
14. -1
15. $\frac{-\sqrt{2}}{8}$
16. $-\frac{1}{2}$
17. -1
18. 0
19. $\frac{3\sqrt{3}}{4}$

13. Antrenman
Sayfa 179 – 180

1. $\frac{1}{\sqrt{1-(x+1)^2}}$
2. $\frac{-2}{\sqrt{1-4x^2}}$
3. $\frac{2x}{1+x^4}$
4. $\frac{1}{2\sqrt{x}(1+x)}$
5. $\frac{2}{1+(2x-1)^2}$
6. $\frac{1}{1+(x+2)^2}$
7. $\frac{2}{x^2+4}$
8. $\frac{2}{x^2+4}$
9. $\frac{1}{\sqrt{1-(1-x)^2}}$
10. $\frac{1}{(x+1)\sqrt{2x+1}}$
11. $\frac{-2}{\sqrt{1-(2x-1)^2}}$
12. $\frac{-2x}{\sqrt{1-\left(x^2+1\right)^2}}$
13. $\frac{1}{\sqrt{x}(1+4x)}$
14. -1
15. -1
16. $\frac{\pi+\sqrt{3}}{6}$
17. -1
18. $\frac{4-\pi}{8}$

14. Antrenman
Sayfa 181 – 182

1. $\frac{3}{5}$
2. -1
3. $-\frac{1}{5}$
4. $-\frac{2}{7}$
5. 1
6. $\frac{1}{6}$
7. $\frac{1}{\sqrt{3}}$

CEVAPLAR

8. $(-1,1)$
9. $\frac{1}{x+2}$
10. $\frac{2x+3}{x^2+3x}$
11. $\frac{-1}{x^2+3x+2}$
12. $\frac{5x+1}{x^2+x-2}$
13. $\cot x$
14. $\frac{1+\tan^2 x}{\tan x}$
15. $\frac{1}{x\ln x}$
16. $\frac{4}{(4x-1)\ln 2}$
17. $\frac{\cot x}{\ln 3}$
18. $\frac{2x+2}{\left(x^2+2x\right)\ln 2}$
19. $\frac{3(\ln x)^2}{x}$
20. $2(x+\ln x)\left(1+\frac{1}{x}\right)$

15. Antrenman
Sayfa 183 – 184

1. $-\frac{1}{x\ln^2 x}$
2. $\frac{1-\ln x}{x^2}$
3. $\frac{2x\ln x-x}{\ln^2 x}$
4. $\frac{5}{x}$
5. $\frac{2}{6x-3}$
6. $-\frac{3}{4}\tan x$
7. $\frac{-7}{2x^2+5x-3}$
8. $x\ln x+\frac{x}{2}$
9. $3\ln x+3$
10. $\frac{1-2\ln x}{x\ln x}$
11. $\frac{-\sin(\ln x)}{x}$
12. $\frac{1}{x\left(1+\ln^2 x\right)}$
13. $-\frac{y(xy+2)}{x(xy-3)}$
14. $\frac{3}{8}$
15. 3
16. $\frac{1}{4e}$
17. $2e$
18. $3e^2$
19. $\frac{1}{3}$
20. $\frac{3}{4}$

16. Antrenman
Sayfa 185 – 186

1. e^x+e^{-x}
2. $3e^x$
3. $2e^{2x-3}$
4. $\cos xe^{\sin x}-2$
5. $\frac{1}{2\sqrt{x}}e^{\sqrt{x}}$
6. $\frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}+1$
7. $e^{x^2+2x-1}(2x+2)$
8. $(2x+1)e^{2x+1}$
9. $\frac{e^{\tan x}}{\cos^2 x}$
10. $\frac{1}{1+x^2}e^{\arctan x}$
11. $(2x+3)e^{x^2+3x-1}$
12. $-6e^{-2x}$
13. $(x^2+2x).e^x$
14. $e^x\left(x^2+4x\right)$
15. $\sin 2x.e^{\sin^2 x}$
16. $\left(1+\tan x+\tan^2 x\right)e^x$
17. $\frac{xe^x}{(x+1)^2}$
18. $\frac{e^x}{2\sqrt{e^x+1}}$
19. $\frac{e^x\left(\ln x-\frac{1}{x}\right)}{\ln^2 x}$
20. $\frac{e^x}{1+e^{2x}}$
21. $\frac{e^x}{\sqrt{1-\left(e^x-1\right)^2}}$
22. $e^x(\sin x+\cos x)$
23. $e^x\left(\ln x+\frac{1}{x}\right)$
24. $\frac{\left(2x-x^2\right)}{e^x}$
25. e^{e^x+x}
26. $\frac{1+e^x}{x+e^x}$
27. $-e^x.\sin\left(e^x+1\right)$
28. $2e^{2x}\left(1+\tan^2\left(e^{2x}\right)\right)$
29. $4\cos 4x.\ln 3$
30. $\frac{2.e^{2x}+\sin 2x}{e^{2x}+\sin^2 x}$

17. Antrenman
Sayfa 187 – 188

1. x^3+3x^2
2. $\cos x-\sin x$
3. 5
4. 1
5. $2e$
6. 8
7. 2
8. $4e^5$
9. $2e^2+5e+3$
10. 3
11. $2e$
12. 0
13. 0
14. $4\cos 1$

18. Antrenman
Sayfa 189 – 190

1. $\frac{5}{2}$
2. -3
3. 216
4. 8
5. x^3+6x^2+6x
6. $-4\cos 2x$
7. $32\cos 8x$
8. 16
9. -36
10. 6
11. 8
12. $-\sin x+\cos x$
13. 6!
14. 61!

TÜREV UYGULAMALARI

1. Antrenman
Sayfa 195 – 196

1. 1
2. 3
3. 1
4. (2,17)
5. 1
6. 1
7. 45°
8. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$
9. $\frac{\sqrt{2}}{2}$
10. $\frac{-4}{3}$
11. -1
12. $\frac{4}{3}$
13. -1
14. $m_n=\frac{1}{6}$
15. 3
16. 3

2. Antrenman
Sayfa 197 – 198

1. 6
2. 2
3. (-1, -8)
4. (2,1)
5. 7
6. 2
7. -6
8. Birbirine paraleldir
9. -3
10. -9
11. $(-2,-6)$
12. 0

3. Antrenman
Sayfa 199 – 200

1. $\frac{32}{3}$
2. 1
3. $(-12,16)$
4. 2
5. 8
6. -11
7. 14
8. 32

9. $y = x - 1$
10. $y = x - 5$

4. Antrenman
Sayfa 201 – 202

1. $y = -x - \frac{3}{2}$
2. $y = 3x - 7$
3. $y = \frac{-x+3}{2}$
4. $y = 3 - x$
5. 2
6. $y = 3x + 3 - 3\ln 3$
7. $y = -\frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{4}$
8. $y = -\frac{3}{4}x + 9$
9. $(0, -16)$
10. $\left(0, \frac{21}{2}\right)$
11. $(2,0)$
12. $\left(\frac{25}{3}, 0\right)$
13. $(0, 8)$
14. $\left(0, -\frac{\pi}{32}\right)$
15. $\left(\frac{5}{3}, 0\right)$

5. Antrenman
Sayfa 203 – 204

1. 7
2. 0
3. 6
4. $3 - 2\sqrt{3}$
5. $\frac{5}{3}$
6. 2
7. $-\frac{21}{2}$
8. $-\frac{1}{2}$

6. Antrenman
Sayfa 205 – 206

1. $\frac{11}{4}$
2. -4
3. 12
4. $\frac{4}{3}$
5. $\frac{2}{3}$
6. $\frac{1}{6}$
7. $-\frac{1}{2}$
8. $\frac{3}{4}$

7. Antrenman
Sayfa 207 – 208

1. I, III, VI, VII
2. III, IV, V, VI
3. II, III, IV
4. III, V, VI

8. Antrenman
Sayfa 209 – 210

1. II, III, V, VII
2. c,d
3. c
4. b, d
5. d, e
6. a
7. a ve c
8. a, c, e

9. Antrenman
Sayfa 211 – 212

1. $(2, \infty)$
2. $(-\infty, 0) \cup (2, \infty)$
3. $(9, \infty)$
4. $(-2, 4)$
5. $(-4, 4)$
6. $(-2, 2)$
7. $(-3, 4)$
8. $(-1, 1)$
9. $(-2, 2)$
10. $(3, \infty)$
11. $(-3, 3)$
12. $(-2, \infty)$

10. Antrenman
Sayfa 213 – 214

1. 2
2. 2
3. 9
4. $\frac{32}{3}$
5. -29
6. $\frac{4}{3}$
7. -25
8. -1
9. $(4, 6)$
10. $(1, 4)$

11. Antrenman
Sayfa 215 – 216

1. -9
2. $\frac{33}{2}$
3. 0
4. I, II, IV
5. E
6. I, II, III, IV
7. I, IV, V, VI
8. 2
9. E

12. Antrenman
Sayfa 217 – 218

1. 4
2. 16
3. $2\sqrt{2}$
4. 2
5. 4
6. $\sqrt{2}$
7. $\sqrt{5}$
8. 4
9. 1200

13. Antrenman
Sayfa 219 – 220

1. 32
2. 52
3. 2
4. 8
5. 50
6. -2
7. 2
8. 5
9. $-\sqrt{5}$
10. 4
11. -1
12. 50

14. Antrenman
Sayfa 221 – 222

1. 3
2. $(1,0)$
3. $\frac{8}{5}$
4. $2\sqrt{2}$
5. $\sqrt{2}$
6. 1
7. 800
8. 2400
9. 2
10. 16

15. Antrenman
Sayfa 223 – 224

1. 32
2. 5
3. 12
4. 2
5. $4 + 4\sqrt{2}$
6. $\sqrt{2}$
7. $2\sqrt{3}$
8. $24\sqrt{2}$

16. Antrenman
Sayfa 225 – 226

1. $\frac{5}{2}$
2. 4
3. 2
4. 4
5. $\frac{1}{e}$
6. 32
7. 17
8. 200

17. Antrenman
Sayfa 227 – 228

1. $-\frac{1}{3}$
2. 1
3. 2
4. -5
5. $(1,7)$
6. -1
7. $(-\infty, 1)$
8. $(-1, 1)$

18. Antrenman
Sayfa 229 – 230

1. 5
2. -15
3. $(-6, -18)$
4. 1
5. a) $(-\infty, 1)$
b) $(1, \infty)$
c) $(1, 1)$
6. a) $\left(\frac{1}{6}, \infty\right)$
b) $\left(-\infty, \frac{1}{6}\right)$
c) $\frac{1}{6}$
7. a) $(0, 2)$
b) $(-\infty, 0) \cup (2, \infty)$
c) 0 , 2
8. 1
9. 4
10. 3
11. $(-\infty, 1) \cup (4, \infty)$
12. $(1, 4)$
13. 2
14. $(-\infty, 2)$
15. D
16. B
17. A
18. A

19. Antrenman
Sayfa 231 – 232

1. 4
2. 2
3. 0 ve 3
4. $(-\infty, -1) \cup (2, 5)$
5. $(-1, 2) \cup (5, \infty)$
6. $(-\infty, 0) \cup (3, \infty)$
7. $(0, 3)$
8. D
9. D
10. D
11. D
12. E
13. D

20. Antrenman
Sayfa 233 – 234

1. $\frac{5}{6}$
2. $-\frac{12}{5}$
3. 8
4. $-b$
5. -3
6. -2
7. 3
8. $\frac{2}{3}$
9. $\frac{1}{3}$
10. $\frac{1}{2}$

21. Antrenman
Sayfa 235 – 236

1. 1
2. 2
3. 1
4. $-\frac{1}{2}$
5. 0
6. 0
7. 0
8. 1
9. -1
10. e
11. 2
12. $-\frac{\sqrt{3}}{4}$
13. $-\frac{1}{4}$
14. $-\pi$
15. 0
16. 0

22. Antrenman
Sayfa 237 – 238

1. 0
2. 0
3. $\frac{1}{2}$
4. 2
5. 2
6. 1
7. 2
8. $\frac{1}{2}$
9. $\frac{1}{2}$
10. $\frac{1}{8}$
11. $\frac{1}{3}$
12. $8x$
13. $9x^2$
14. 6
15. 4
16. 3

23. Antrenman
Sayfa 239 – 240

1. 6
2. 12
3. 2e
4. $\frac{\sqrt{3}}{2}$
5. -6
6. 20
7. 15
8. 35
9. 19
10. $\frac{4}{5}$
11. $-\frac{1}{2}$
12. $-\frac{3}{2}$
13. 2
14. 0
15. -4
16. 1

Fonksiyon Grafikleri

24. Antrenman
Sayfa 241 – 242

1. a) -8
b) -2
c) 4
2. a) -1 ve 2
b) x = 3 te teğet, x = 1
c) x = - 2 de teğet, x= 1 ve x = 4 de keser
3. a) x eksenini x = -1 de keser, x = 2 de teğet, y eksenini y = 4 te keser.
b) x = 0 da x eksenine teğet, x = 3 te keser, y eksenini y = 0 da keser.
c) x eksenini x = - 3, x = 3 ve x = - 2 de keser, y eksenini y = - 18 de keser.
d) x eksenini x = -1, x = 1 ve x = - 4 te keser, y eksenini y = 3 te keser.
4. E
5. E
6. D

25. Antrenman
Sayfa 243 – 244

1. B
2. B
3. D
4. C
5. C
6. B
7. C
8. B

26. Antrenman
Sayfa 245 – 246

1. A
2. 3
3. 8
4. 6

27. Antrenman
Sayfa 247 – 248

1. a) x = - 2 düşey asimptot
b) x = 2 düş. as. (baca var)
x = - 3 düşey asimptot
c) x = - 1 düşey asimptot
2. a) x = 2 düşey asimptot
y = 4 yatay asimptot
b) x = 2 ve x = -2 düşey asimptot
y = 3 yatay asimptot
c) x = -2 düşey asimptot (baca var)
y = 0 yatay asimptot
d) x = 1 düşey asimptot (baca var)
x = -2 düşey asimptot
y = 1 yatay asimptot
3. 4
4. (2,3)
5. (-1, 3)
6. 4
7. -3
8. a) x = 2 düşey asimptot
y = x +2 eğik asimptot

b) $x = 3$ ve $x = -3$ düşey asimptot

$y = x$ eğik asimptot

c) $x = -2$ düşey asimptot

$y = x^2 - 2x + 4$ eğik asimptot

d) $x = -2$ düşey asimptot

$y = x^2$ eğri asimptot

9. (3,6)
10. -4
11. 0

28. Antrenman
Sayfa 249 – 250

1. A
2. D
3. B
4. B
5. A
6. E
7. B
8. E

29. Antrenman
Sayfa 251 – 252

1. C
2. A
3. B
4. A

BELİRSİZ İNTEGRAL

1. Antrenman
Sayfa 255 – 256

1. $x^3 + 5x^2 + c$
2. $x^2 + \tan x + c$
3. $\frac{\tan x}{x^2+1} + c$
4. $x - 2\ln x + c$
5. $e^x \cos x + c$
6. $\frac{f(x)}{x} + c$
7. $x\sqrt{3x-2} + c$
8. $\arcsin(x+1) + c$
9. $x \tan\sqrt{x}$
10. $\frac{e^x}{\ln x}$
11. $x^2 + f(2x-1)$
12. $\frac{2x-3}{x+5}$

2. Antrenman
Sayfa 257 – 258

1. $4x^3 + 4x + 3$
2. $e^{2x} + 1$
3. $2x\cos x$
4. 12
5. 42
6. 6
7. $x^2 + 2x - 5$
8. -1
9. 0
10. -1
11. $\cos x - \sin x$
12. $e^x + \frac{1}{x}$
13. $x^5 + 2x^2$
14. $e^x + \ln x$
15. $\frac{1}{1+x^2}$
16. 4

3. Antrenman
Sayfa 259 – 260

1. $\frac{x^5}{5} + c$
2. $2x^3 + c$
3. $\frac{x^6}{2} + c$
4. $-x^{-3} + c$
5. $\frac{5y^2}{2} + c$
6. $3x + c$
7. $x + c$
8. $u^3 + c$
9. $\frac{3x^4}{8} + c$
10. $\frac{u^2}{6} + c$
11. $\frac{x^{-1}}{-1} + c$
12. $\frac{2x^{3/2}}{3} + c$
13. $\frac{9}{2}x^{4/3} + c$
14. $\frac{3}{5}x^{5/3} + c$
15. $4x^{1/2} + c$
16. $\frac{x^3}{3} + x^2 - 3x + c$
17. $\frac{x^9}{36} - \frac{3x^4}{4} + x^2 - 5x + c$
18. $\frac{x^3}{3} - x + c$
19. $\frac{x^4}{4} + x + c$
20. $\frac{2x^{5/2}}{5} + x^2 + c$
21. $\frac{x^2}{2} - \frac{2}{x} + c$
22. $2x^{3/2} + 4x^{1/2} + c$
23. $\frac{x^2}{2} - 2x + c$
24. $\frac{x^2}{2} - 3x + c$
25. $\frac{x^2}{2} - x + c$
26. $3x + 2y + c$
27. $x^3 + y^4 + c$
28. $\frac{5}{3}u^6 - 2x^3 + c$

4. Antrenman
Sayfa 261 – 262

1. -2
2. 4
3. -3
4. 2
5. 3
6. -6
7. 18
8. 2
9. $-\frac{2}{3}$
10. 4

5. Antrenman
Sayfa 263 – 264

1. $4\ln x + 2x + c$
2. $3e^x + 2x + c$
3. $\frac{x^2}{2} - 2x + \ln x + c$
4. $\frac{x^2}{2} + 3x + c$
5. $24 + \ln 2$
6. $7 + \ln 2$
7. $2\sin x + \cos x + c$
8. $\frac{3\sqrt{2}}{2} - 1$
9. $-4\cos u - 3u + c$
10. $2x + \sin x + c$
11. $2\pi + 2$
12. $x^3 - 2\cos x + c$
13. $e^x + \frac{x^3}{3} + c$
14. $e^x - 2\ln x + c$
15. $e - \frac{1}{2}$
16. $x^3 - 5\ln x + c$
17. $x^2 - e^x + x + c$

6. Antrenman
Sayfa 265 – 266

1. $3\sin x - \cos x + c$
2. $-\sin x + c$
3. $\cos x + c$
4. $\frac{-\sqrt{3}}{2} + 1$
5. $x + \cos x + c$
6. $-2\cos x + c$
7. $\sin x + c$
8. $2\tan x + c$
9. $\frac{\pi}{4} + 1$
10. $-\cot x + c$
11. $3x - \tan x + c$
12. $\sin x + c$
13. $-\frac{1}{2}\cos u + c$
14. $x^3 + \sin x + c$
15. $3e^x - 2\ln x + \sin x + c$
16. $2^x + c$
17. $2\arcsin x + c$
18. π
19. $\frac{1}{2}\arctan x + c$
20. 2π

7. Antrenman
Sayfa 267 – 268

1. $x - 2\arctan x + c$
2. $x^3 + x^2 - 3\arctan x + c$
3. $2\arcsin x - x + c$
4. $4x + \cot x + c$
5. $\arcsin x + c$
6. $\frac{5}{2}\arcsin x + c$
7. $f(x).g(x) + c$
8. $x.f(x) + c$
9. $\frac{f(x)}{x} + c$
10. $\frac{x}{f(x)} + c$
11. $\frac{(x-1)^4}{4} + c$
12. $\frac{(x^2+2)^4}{4} + c$
13. $\frac{(x^2-x+1)^5}{5} + c$
14. $\frac{31}{5}$

CEVAPLAR

8. Antrenman
Sayfa 269 – 270

1. $\frac{31}{10}$
2. $\frac{4\sqrt{2}-2}{9}$
3. $\frac{2\sqrt{2}-1}{3}$
4. $\frac{(\sqrt{x}+2)^4}{4} + c$
5. $-\frac{1}{2x+1} + c$
6. $-\frac{3}{2(x^2-4)^2} + c$
7. $-\frac{1}{6(x^3+2)^2} + c$
8. $\frac{2}{3}(x+1)^{3/2} + c$
9. $\frac{2}{9}(3x-2)^{3/2} + c$
10. $\frac{3}{5}(x-2)^{5/3} + c$
11. $\frac{26}{3}$
12. $\frac{1}{3}(x^2+1)^{3/2} + c$
13. $\frac{1}{8}(3x^2-2)^{4/3} + c$
14. $\frac{3}{4}(x^4+x-1)^{4/3} + c$
15. $3(x^2+x+1)^{2/3} + c$
16. $\frac{3}{2}(x^2+1)^{1/3} + c$

9. Antrenman
Sayfa 271 – 272

1. $\frac{-\cos^3 x}{3} + c$
2. $\frac{7}{24}$
3. $-\frac{1}{\sin x} + c$
4. $\frac{2}{3}(\sin x)^{3/2} + c$
5. $-\frac{\cos^4 x}{2} + c$
6. $-2\sqrt{\cos x} + c$
7. $\frac{3}{2}$
8. $\frac{37}{3}$
9. $\frac{(\arcsin x)^3}{3} + c$
10. $\frac{(\arctan x)^2}{2} + c$
11. $\frac{(\ln x)^3}{3} + c$
12. $\frac{1}{2}$
13. 7
14. $\frac{\sin^4 x}{4} + c$
15. $\frac{1}{3}$
16. $\frac{15}{4}$

10. Antrenman
Sayfa 273 – 274

1. $\ln|f(x)| + c$
2. $2\ln|x| + c$
3. $x + 2\ln|x| + c$
4. $\ln|3x-1| + c$
5. $\frac{\ln|3x-5|}{3} + c$
6. $\frac{3}{4}\ln|4x-2| + c$
7. $2\ln|2x+3| + c$
8. $\ln 2$
9. $\frac{\ln 5}{2}$
10. $\ln 3$
11. $x^3 - 2\ln|x+3| + c$
12. $\ln|x-1| + 2\ln|x-3| + c$
13. $3\ln|x-2| - 2\ln|x-1| + c$
14. $\ln|x^2-3x+3| + c$
15. $\frac{1}{2} + \ln\frac{4}{3}$

11. Antrenman
Sayfa 275 – 276

1. $\ln 2$
2. $\frac{\ln|x^2-2|}{2} + c$
3. $\frac{\ln|x^3-2|}{3} + c$
4. $\frac{\ln\left((x^2-x)^2+3\right)}{2} + c$
5. $\frac{\ln 9 - \ln 2}{6}$
6. $\frac{\ln\left((x^2+2)^3-5\right)}{6} + c$
7. $\ln|\sin x| + c$
8. $\ln(1-\cos x)$
9. $\ln|x+\sin^2 x| + c$
10. $-\ln 2$
11. $\ln|x+e^x| + c$
12. $\ln|\ln x| + c$
13. $-\ln|\cos x| + c$
14. $3\ln|\sin x| + c$
15. $\frac{1}{2}\ln|1+\sin(x^2+1)| + c$
16. $\ln|1+\tan x| + c$

12. Antrenman
Sayfa 277 – 278

1. $\frac{2}{3}e^{3x} + c$
2. $e^{2x+1} + c$
3. $e^{x^2+x} + c$
4. $e^{\sin x} + c$
5. 3
6. $\frac{e^2 - e^{-1}}{3}$
7. $e - 1$
8. $e - 1$
9. $e^{\arctan x} + c$
10. $-e^2 + e + 1$
11. $-e^{1/x} + c$
12. $-\frac{e^{-2x+1}}{2} + c$
13. $\frac{e^{2x}}{2} + 2e^x + x + c$
14. $e^{1+\sin^2 x} + c$
15. $\frac{37}{3}$
16. 2

13. Antrenman
Sayfa 279 – 280

1. 0
2. $-\frac{\cos 2x}{2} + c$
3. $4x - \cos x + c$
4. $\frac{1}{4}$
5. $-5\cos(x-5) + c$
6. $\sin(e^x+1) + c$
7. $-\frac{\cos(x^2+1)}{2} + c$
8. $\frac{\sin(4x-1)}{2} + c$
9. $-\frac{\cos(x^2-1)}{2} + c$
10. $-\cos x - 2\sin 2x + c$
11. $-\frac{\cos 2x}{2} + \cos x + c$
12. $\frac{\sin(3-2x^2)}{4} + c$
13. $\frac{\sin(x^2+2x+3)}{2} + c$
14. $-2\cos\left(\frac{x+1}{2}\right)$
15. $\cos\frac{1}{x} + c$

14. Antrenman
Sayfa 281 – 282

1. $-\cos(\tan x) + c$
2. $-\cos\sqrt{x} + c$
3. $2\sin\sqrt{x+2} + c$
4. $\sin(\ln x) + c$
5. $-\cos(1+\ln x) + c$
6. $\cos(\cos^2 x) + c$
7. $-\cos 6x + c$
8. $-\frac{\sin 2x}{2} + c$
9. π
10. $\frac{(1+\sin x)^3}{3} + c$
11. $\frac{65}{4}$
12. $\frac{-\ln|\cos x^2|}{2} + c$
13. $\tan x + c$
14. $\frac{\tan^2 x}{2} + c$
15. $\frac{1}{3}$
16. $\sqrt{3} - \frac{1}{\sqrt{3}}$

15. Antrenman
Sayfa 283 – 284

1. $2\arctan x + c$
2. $\frac{\pi}{4}$
3. $\arctan(x+2) + c$

4. $\arctan e^x + c$
5. $\frac{\arctan(x^2+2)}{2} + c$
6. $\arctan(\sin x) + c$
7. $\arcsin x + c$
8. $\arcsin(x-5) + c$
9. $\frac{\arcsin(2x+1)}{2} + c$
10. $\arcsin e^x + c$
11. $\arcsin(\ln x) + c$
12. $\sin(\arctan x) + c$
13. $\arctan(\ln x) + c$
14. $\arctan(x+1) + c$
15. $\ln(x^2+1) + \arctan x + c$

16. Antrenman
Sayfa 285 – 286

1. $x\ln x - x + c$
2. $(x+1)\ln(x+1) - x - 1 + c$
3. $x^2 - x\ln x + x + c$
4. $4\ln 4 - 3\ln 3 - 1$
5. $\frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4} + c$
6. $\frac{x^3}{3}\ln x - \frac{x^3}{9} + c$

17. Antrenman
Sayfa 287 – 288

1. 1
2. $e^x(x+1) + c$
3. $e^x(x^2-2x+2) + c$
4. $e^x(x^2-x+1) + c$
5. $\frac{x^2}{2} - (x-1)e^x + c$
6. $x\sin x + \cos x + c$
7. $\ln|x-2| + c$
8. $\ln|x^2+x-5| + c$
9. $2\ln\frac{6}{5}$
10. $\ln\frac{5}{4}$
11. $3\arctan x + c$
12. $\arctan(x-2) + c$
13. $3\arctan(2x-5) + c$

18. Antrenman
Sayfa 289 – 290

1. $\frac{\arctan(3x-2)}{3} + c$
2. $\arctan(x+1) + c$
3. $-\frac{1}{x+2} + c$
4. $-\frac{1}{4(2x-3)^2} + c$
5. $-\frac{1}{x-1} + c$
6. $-\frac{1}{2(x+1)^2} + c$
7. $-\frac{1}{2(2x+1)} + c$
8. $-\frac{1}{x+3} + c$
9. $2\ln|x-1| + \ln|x+2| + c$
10. $2\ln x - \ln|x+1| + c$
11. $\ln\left|\frac{x-2}{x+3}\right| + c$

19. Antrenman
Sayfa 291 – 292

1. $3\ln|x+2| - \ln|x-1| + c$
2. $2\ln|x-3| + 3\ln|x+1| + c$
3. $3\ln|x+2| - \ln|x-2| + c$
4. $\ln\frac{10}{9}$
5. $\ln\frac{32}{9}$
6. $3\ln|x+3| - \ln|x-3| + c$
7. $5\ln x + 2x + c$
8. $\frac{3x^2}{2} + 2\ln x + c$
9. $x + \ln|x+1| + c$
10. $2x + 5\ln|x-1| + c$
11. $x + 2\ln|x-2| + c$
12.

20. Antrenman
Sayfa 293 – 294

1. $\frac{x^2}{2} - x + \ln|x+1| + c$
2. $\frac{3x^2}{2} + x + \ln|x-1| + c$
3. $\frac{x^2}{2} + x + 3\ln|x-2| + c$
4. $2x - \arctan x + c$
5. $-\frac{1}{2} + \ln 2$
6. $\frac{x^2}{2} + 2\ln|x-1| + c$
7. $\frac{x^2}{2} + 4x + 4\ln|x-2| + c$
8. $\frac{5}{2} - 2\ln 2$
9. $\frac{1}{2} + \ln\frac{5}{4}$
10. $-1 + 2\ln\frac{5}{3}$
11. $\frac{10}{3} + 8\ln\frac{2}{3}$
12. $\ln\frac{3}{4}$

21. Antrenman
Sayfa 295 – 296

1. $\int \frac{u\,du}{3}$
2. $\int (u^3+u)du$
3. $\int (u^2+1)du$
4. $\int t^3 dt$
5. $\int (u^3-1)du$
6. $\int (u^2+u)du$
7. $\int \frac{1}{1+u^2}du$
8. $\int \frac{2}{t+t^2}dt$
9. $\int (\cos t + \sin t)du$
10. $\int -\sin^2 t\,dt$

22. Antrenman
Sayfa 297 – 298

1. $\int (2u^3+2u^2-4u)du$
2. $\int 2t^3 e^t dt$
3. $\int \cos^2 t\,dt$
4. $\int 27\sin t\cos^2 t\,dt$
5. $\int \sin t\,dt$
6. $\int \frac{4}{\cos^3 t}dt$
7. $\int \frac{1}{\cos t}dt$
8. $\int \frac{2u^2}{u+1}du$
9. $\int \frac{2u^2}{u^2-1}du$
10. $\int (2u^2-2)du$
11. $\int (4u^6+4u^4+4u^2)du$
12. $\int 6u^7 du$

BELİRLİ İNTEGRAL

1. Antrenman
Sayfa 303 – 304

1. 12
2. -2
3. $\frac{13}{3}$
4. 2
5. 2
6. 3
7. 9
8. 4
9. 12
10. 8
11. 2
12. -3

2. Antrenman
Sayfa 305 – 306

1. $-\frac{5}{4}$
2. $\frac{3\sqrt{2}}{2} - 1$
3. 1
4. $3 + 3\ln 2$
5. $2 + 4\ln 2$

CEVAPLAR

6. $\frac{1}{2}$
7. $\frac{\sqrt{3}}{4}$
8. $\frac{\pi}{4}$
9. 8
10. -4
11. $\frac{-5}{3}$
12. $\frac{10}{3}$

3. Antrenman
Sayfa 307 – 308

1. 0
2. 0
3. 0
4. 0
5. $\frac{15}{4}$
6. 10
7. $\frac{7}{6}$
8. $\frac{26}{3}$
9. $\frac{32}{3}$
10. 14
11. $\frac{2\sqrt{2}-1}{3}$
12. $\frac{3}{2}\sqrt[3]{2}$

4. Antrenman
Sayfa 309 – 310

1. 4
2. 4
3. 2
4. $-\frac{4}{15}$
5. $\frac{19}{3}$
6. $\frac{8}{3}$
7. $\frac{1}{2}$
8. $\frac{15}{64}$
9. $\frac{1}{3}$
10. 60°
11. $\frac{\ln 9}{4}$
12. $\frac{\sqrt{15}}{3}$

5. Antrenman
Sayfa 311 – 312

1. $\frac{1}{2}\ln\frac{8}{3}$
2. $\ln 2$
3. 1
4. 6
5. $\ln 8$
6. $\ln 4$
7. $\ln 2$
8. $\ln\frac{4}{3}$
9. $\ln 2$
10. 2
11. $\frac{e^2-e}{2}$
12. $e-1$

6. Antrenman
Sayfa 313 – 314

1. $2 + 3\ln 3$
2. $-\frac{1}{2} + 3\ln 2$
3. $-\frac{1}{2} + \ln 2$
4. $2 - \ln 2$
5. $\ln\frac{3}{2}$
6. $\ln\frac{4}{3}$
7. $5\ln 3 - \frac{3}{2}\ln 5$
8. 1
9. $2e - 1$
10. $2e^2 - 2$
11. 1
12. $\frac{3}{4}$

7. Antrenman
Sayfa 315 – 316

1. $\int_2^3 \frac{2u(1+u)}{u-1}du$
2. $\int_0^{\pi/6} \cos^2 t\,dt$
3. $\int_{\pi/3}^{\pi/2} \sin^2 t\,dt$
4. $\int_0^2 \frac{u\,du}{3}$
5. $\int_0^1 (u^3+u)du$
6. $\int_1^3 (u^2+1)du$
7. $\int_2^3 (t^2-1)du$
8. $\int_2^4 t^2 dt$
9. $\int_1^2 (u^2+u)du$

8. Antrenman
Sayfa 317 – 318

1. $\int_0^3 \frac{1}{u^2+1}du$
2. $\int_0^1 \frac{2}{t+t^2}dt$
3. $\int_{\pi/2}^{5\pi/6} -(\sin t + \cos t)dt$
4. $\int_{\pi/3}^{\pi/2} \sin^2 t\,dt$
5. $\int_0^{\pi/4} \cos^2 t\,dt$
6. $\int_0^{\pi/4} \sin t(1+\tan^2 t)dt$
7. $\int_2^3 2(u^3+u^2-2u)du$
8. $\int_1^2 2t^3 e^t dt$
9. $\int_0^{\pi/2} 27\sin t\cos^2 t\,dt$
10. $\int_{\pi/6}^{\pi/2} \sin t\,dt$
11. $\int_0^{\pi/4} \frac{4}{\cos^3 t}dt$
12. $\int_0^{\pi/4} \frac{1}{\cos t}dt$

9. Antrenman
Sayfa 319 – 320

1. $\int_1^2 \frac{2u^2 du}{u+1}$
2. $\int_1^2 \frac{2u^2}{u^2-1}du$
3. $\int_{-2}^1 (2u^2-2)du$
4. 8
5. 40
6. 36
7. 24
8. 9
9. $\frac{26}{3}$
10. $\frac{40}{3}$
11. 32
12. $\frac{16}{15}$

10. Antrenman
Sayfa 321 – 322

1. 18
2. 2
3. 32
4. 14
5. $\frac{13}{2}$
6. 6
7. $\frac{37}{2}$
8. 10
9. $\frac{\sqrt{3}-1}{2}$

11. Antrenman
Sayfa 323 – 324

1. 4
2. 2
3. 2
4. 5
5. 1
6. 2
7. $\frac{1}{2}$
8. 2

CEVAPLAR

12. Antrenman
Sayfa 325 – 326

1. 6
2. 6
3. 10
4. 8
5. $\frac{34}{3}$
6. $\frac{64}{3}$
7. 1
8. 2
9. 4
10. $\sqrt{2}-1$
11. $2\sqrt{2}$
12. $2\sqrt{2}$

13. Antrenman
Sayfa 327 – 328

1. $\frac{14}{3}$
2. 8
3. $\frac{8}{3}$
4. $\frac{16}{3}$
5. $\frac{22}{3}$
6. $\frac{32}{3}$

14. Antrenman
Sayfa 329 – 330

1. 4
2. 12
3. $\frac{4}{3}$
4. $\frac{14}{3}$
5. 1
6. $2\ln 3$
7. 2
8. $\frac{1}{2}$

15. Antrenman
Sayfa 331 – 332

1. $e^2-\frac{1}{e}$
2. $\frac{1}{6}$
3. $\frac{\pi}{2}$
4. e^2
5. $\frac{4}{3}$
6. 1
7. $\frac{22}{3}$

16. Antrenman
Sayfa 333 – 334

1. 4
2. 2
3. $\frac{32}{3}$
4. $\frac{4}{3}$
5. 8
6. 11
7. $\frac{8}{3}$

17. Antrenman
Sayfa 335 – 336

1. $\frac{1}{2}$
2. 12
3. 2
4. $2\ln 2$
5. 1
6. $\ln\frac{2}{\sqrt{3}}$
7. $\frac{23}{3}$
8. 2

18. Antrenman
Sayfa 337 – 338

1. $\frac{17}{4}$
2. $\frac{3}{2}$
3. $3\ln 4$
4. $\frac{16}{3}$
5. $\frac{1}{6}$
6. $\frac{9}{2}$

19. Antrenman
Sayfa 339 – 340

1. $\frac{4}{3}$
2. 4
3. $\frac{1}{2}$
4. $\frac{125}{6}$
5. $\frac{9}{2}$
6. $\frac{9}{2}$
7. $\frac{9}{2}$
8. $\frac{1}{3}$

20. Antrenman
Sayfa 341 – 342

1. $\frac{2}{3}$
2. $\frac{4}{3}$
3. $\frac{1}{4}$
4. 8
5. $\frac{64}{3}$
6. $\frac{4}{3}$
7. $\frac{1}{12}$
8. $\frac{3}{2}-2\ln 2$

21. Antrenman
Sayfa 343 – 344

1. 1
2. 3
3. $\frac{10}{3}$
4. $\frac{1}{3}+\ln 3$
5. $\frac{20}{3}$
6. 17

22. Antrenman
Sayfa 345 – 346

1. -9
2. 5
3. 19
4. 2b
5. 14
6. $-\frac{13}{2}$
7. 8
8. 2

23. Antrenman
Sayfa 347 – 348

1. 21
2. $\frac{14}{3}$
3. e^2-e
4. $\frac{14}{3}$
5. $2e^3$
6. 42

24 Antrenman
Sayfa 349 – 350

1. $\frac{3}{2}$
2. $\frac{45}{4}$
3. $\frac{9}{2}$
4. $\frac{9}{2}$
5. $\int_0^2 \sqrt{4-x^2}\,dx$
6. $\int_{-2}^2 \sqrt{4-x^2}\,dx$
7. $\int_0^2 \left(\sqrt{4-x^2}-\frac{2-x}{2}\right)dx$

25. Antrenman
Sayfa 351 – 352

1. $\int_0^2 \left(\sqrt{4-x^2}-(2-x)\right)dx$
2. $\int_0^{\sqrt{2}} \left(\sqrt{4-x^2}-x\right)dx$
3. $\int_{\frac{-3}{\sqrt{2}}}^0 \left(\sqrt{9-x^2}+x\right)dx$
4. $\int_{-2}^0 \sqrt{4-x^2}\,dx+\int_0^{\sqrt{2}} \left(\sqrt{4-x^2}-x\right)dx$
5. $\int_0^4 \left(\sqrt{16-y^2}-\frac{4-y}{2}\right)dy$
6. $\int_0^2 \left(\frac{x-2}{2}+\sqrt{4-x^2}\right)dx$
7. π
8. 9π
9. 4π
10. $\frac{\pi}{2}$
11. $\frac{\pi}{2}$
12. $\frac{\pi}{4}$

26. Antrenman
Sayfa 353 – 354

1. $\frac{\pi}{2}$
2. $\pi-2$
3. $\frac{9\pi}{4}-\frac{9}{2}$
4. $\frac{\pi}{4}+1$
5. $\frac{\pi}{12}$
6. $\frac{\pi}{6}$
7. 2π
8. 2
7. $\frac{\pi}{7}$

27. Antrenman
Sayfa 355 – 356

1. $\frac{119\pi}{15}$
2. $\frac{26}{15}\pi$
3. $\frac{\pi}{5}$
4. $\frac{\pi}{2}$
5. $\frac{7}{18}$
6. 4
7. $\frac{3\pi}{2}$
8. $\pi-\frac{\pi^2}{4}$

28. Antrenman
Sayfa 357 – 358

1. $\frac{3\pi}{2}$
2. $\frac{4}{3}\pi$
3. $\frac{83\pi}{5}$
4. $\frac{9\pi}{8}$
5. $\frac{24\pi}{5}$
6. $\frac{4\pi}{3}$
7. $\frac{3\pi}{10}$

29. Antrenman
Sayfa 359 – 360

1. $\frac{3\pi}{4}$
2. $\frac{2}{5}\pi$
3. $\frac{e^6-e^2}{2}\pi$
4. $\frac{93\pi}{5}$
5. $\frac{72}{5}\pi$
6. $\frac{\pi}{5}$